

Autour de la diffusion

Introduction

Cette composition porte sur l'étude de différents phénomènes de diffusion régis par le même type d'équations et dont les comportements sont analogues par-delà la variété de leurs manifestations.

Dans ce sujet, après quelques préliminaires, on étudiera la diffusion thermique et plus particulièrement quelques dispositifs permettant de mesurer la conductivité thermique de certains matériaux. On s'intéressera ensuite à la diffusion de la quantité de mouvement, par d'abord une approche microscopique puis par l'étude de deux écoulements particuliers. Enfin, la quatrième partie constitue une approche de la diffusion de la matière avec une application à l'étude de l'évaporation d'une goutte. Pour terminer une approche statistique du mouvement brownien est proposée.

Le plan précis de la composition est le suivant :

Partie I - Préliminaires

Partie II - Diffusion de la chaleur

- II-1 La loi de Fourier
- II-2 Dispositif de la plaque chaude gardée
- II-3 Dispositif des cylindres coaxiaux
- II-4 La méthode Flash

Partie III - Diffusion de la quantité de mouvement

- III-1 Force de viscosité et approche microscopique de la diffusion de la quantité de mouvement
- III-2 Équation de diffusion
- III-3 Frottement fluide sur une plaque en mouvement rectiligne uniforme
- III-4 Viscosimètre de Couette

Partie IV - Diffusion de la matière

- IV-1 Loi de Fick et diffusion de particules
- IV-2 Évaporation d'une goutte d'eau sphérique
- IV-3 Modèle microscopique de diffusion de particules et mouvement brownien

Les parties II, III et IV sont dans une large mesure indépendantes. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction dans leur barème.

On rappelle les valeurs numériques de quelques constantes fondamentales :

Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_A \simeq 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R \simeq 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

I – Préliminaires

1 – Décrire le moteur microscopique commun à tous les phénomènes de diffusion.

Dans toute la composition, on nomme *équation de diffusion* une équation de type :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D\Delta a,$$

où $a(M,t)$ peut représenter un champ scalaire ou vectoriel réel représentant une grandeur physique et D est une grandeur réelle caractérisant le processus diffusif étudié, appelé coefficient de diffusion.

2 – Donner la dimension de D .

3 – Déterminer au moins deux propriétés de l'équation de diffusion et préciser leurs conséquences sur l'étude des phénomènes diffusifs.

4 – On note τ un temps caractéristique d'évolution et L^* une distance caractéristique d'évolution de $a(M,t)$. En faisant une analyse dimensionnelle, relier ces deux grandeurs. Commenter.

5 – Définir la notion de régime stationnaire. Dans le cas du régime stationnaire, donner la forme que prend l'équation de diffusion. Commenter.

En régime quelconque, l'équation de diffusion peut être analysée comme une équation de propagation puisqu'elle relie des dérivées partielles spatiales à des dérivées partielles temporelles du champ $a(M,t)$. On s'intéresse à la propagation dans la direction (Oz) et le sens croissant, d'une onde de pulsation ω , caractérisée par une amplitude complexe :

$\underline{a}(M,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - k z)}$, telle que $a(M,t) = \text{Re}(\underline{a}(M,t))$ et où $\underline{k}\vec{u}_z$ est un vecteur d'onde complexe.

6 – Déterminer la relation de dispersion reliant \underline{k} et ω . Indiquer si la propagation s'accompagne d'un phénomène de dispersion et/ou d'atténuation. Définir dans ce cas l'épaisseur de peau δ .

II – Diffusion de la chaleur

II.1 – La loi de Fourier

Soit $T(M,t)$ la température en un point M de l'espace à l'instant t . La loi de Fourier est une loi phénoménologique qui relie le champ de température $T(M,t)$ au vecteur densité de courant thermique : $\vec{j}_{th}(M,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$.

- 7 – Définir la notion de loi phénoménologique. Citer deux conditions de validité de la loi de Fourier.
- 8 – Donner quelques informations historiques sur le scientifique J. Fourier (dates, travaux).
- 9 – Nommer le coefficient λ et donner son unité. Citer des paramètres physiques dont peut dépendre le coefficient λ .

Dans la suite de la composition on considère le coefficient λ comme constant et indépendant du point M .

- 10 – Donner l'ordre de grandeur de ce coefficient pour un métal, l'eau et l'air à température ambiante.

Une expérience qualitative de cours classique consiste à poser au même instant deux glaçons identiques sur deux matériaux différents (par exemple un récipient en bois et une poêle) et à observer la fonte des glaçons.



FIGURE 1 – Deux glaçons identiques sur une poêle et un récipient en bambou, 5 minutes après qu'ils ont été posés sur leur support respectif. D.R.

- 11 – La photographie de la figure 1 a été prise cinq minutes après le début de l'expérience. Analyser la situation physique et proposer une explication à cette expérience qualitative.

On s'intéresse maintenant à la diffusion de la chaleur dans un matériau immobile de volume constant, de masse volumique μ uniforme et de capacité thermique massique à volume

constant c_v uniforme. On suppose qu'il n'y a ni production, ni absorption de la chaleur au sein du matériau.

- 12 – À partir du premier principe de la thermodynamique, déterminer l'équation de la diffusion satisfaite par le champ de température $T(M,t)$ dans le matériau. Indiquer à chaque étape du raisonnement s'il est nécessaire de faire des hypothèses. Donner l'expression du coefficient de diffusion D_{th} associé à la diffusion de la chaleur (ce coefficient est également appelé diffusivité thermique).

Il existe différents dispositifs expérimentaux permettant de mesurer la conductivité thermique ou le coefficient de diffusivité thermique d'un matériau : des méthodes de mesures en régime stationnaire, des méthodes en régime quasi-établi et des méthodes en régime variable... Les mesures d'une conductivité thermique avec une bonne précision sont des opérations très délicates qui se font en général dans des laboratoires spécialisés. Le principe de mesure est différent suivant le type de matériau que l'on souhaite étudier (plus ou moins conducteur de chaleur, solide ou fluide...).

Dans la suite, on se propose d'étudier deux principes de mesures en régime stationnaire de la conductivité thermique d'un matériau : le premier matériau sera solide, le suivant sera un fluide.

II.2 – Dispositif de la plaque chaude gardée

Cette méthode est assez bien adaptée à la mesure de la conductivité thermique λ de matériaux isolants solides, dont la forme est une plaque de surface Σ et d'épaisseur e . On considère que la surface Σ dans l'expérience présentée ici est de $610 \times 610 \text{ mm}^2$; l'épaisseur e est variable suivant les échantillons, entre 20 mm et 100 mm.

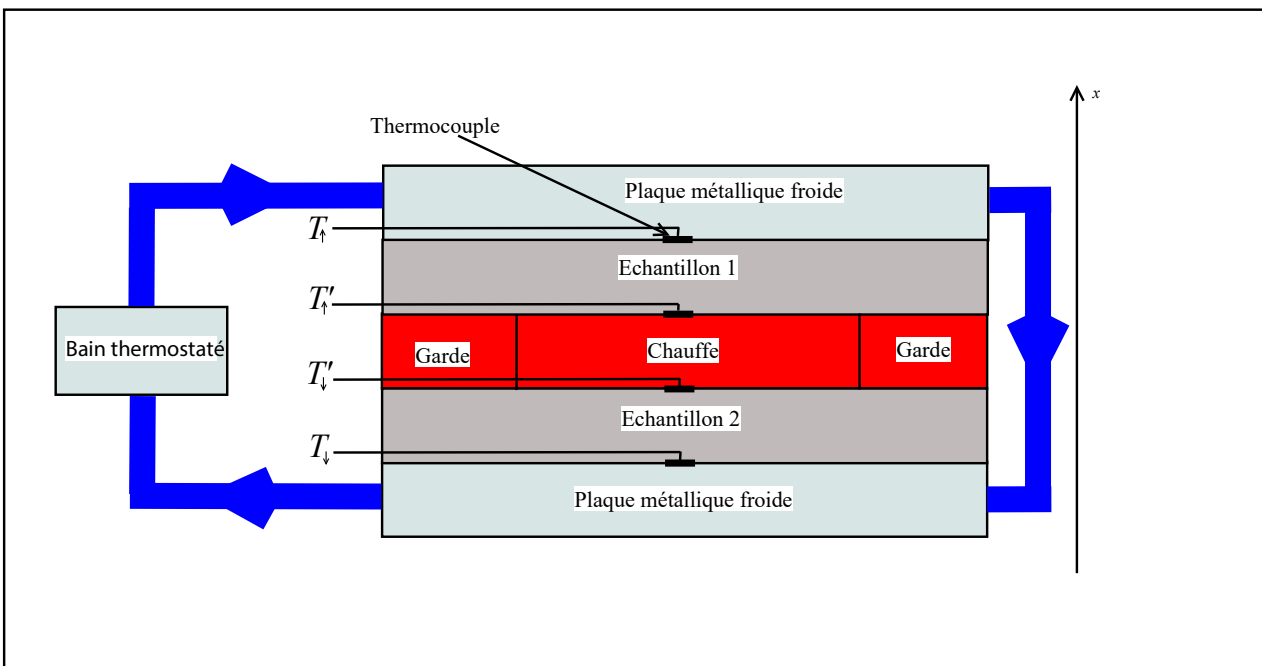


FIGURE 2 – Dispositif expérimental de la méthode de la plaque chaude gardée.

La figure 2 indique le schéma de principe de l'expérience. Les plaques, placées à la base et au sommet du dispositif expérimental, sont constituées d'un matériau très conducteur (cuivre ou aluminium) et sont maintenues à une température constante grâce à l'utilisation d'une circulation d'eau issue d'un bain thermostaté.

Une plaque chauffante délivre par effet Joule une puissance totale de chauffe ϕ uniforme et constante. Cette puissance de chauffe est transmise aux deux échantillons quasi-identiques constitués du même matériau dont on veut mesurer la conductivité thermique. On supposera ici que la puissance totale de chauffe générée par l'élément chauffant se répartit dans chacun des échantillons, et on note $\varphi_S = \frac{\phi}{2S}$ la densité moyenne de flux thermique (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) émise par la plaque chauffante de surface S et traversant les échantillons.

Afin de s'assurer que le transfert thermique est unidirectionnel dans la zone centrale, on entoure la plaque chauffante d'un anneau de garde carré, à la même température que cette dernière.

On place des thermocouples sur chaque face des échantillons (voir figure 2). On note T_{\uparrow} et T'_{\uparrow} les températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 1. De même, on note T_{\downarrow} et T'_{\downarrow} les températures mesurées respectivement sur la face froide et la face chaude de l'échantillon 2. On note enfin les écarts positifs de température $\Delta T_{\uparrow} = T'_{\uparrow} - T_{\uparrow}$ et $\Delta T_{\downarrow} = T'_{\downarrow} - T_{\downarrow}$.

- 13 – On se place dans le cadre d'un modèle unidimensionnel, où le champ de température dans les échantillons ne dépend que de la coordonnée $x : T(x,t)$. Discuter l'hypothèse permettant de supposer un modèle unidimensionnel. Expliquer qualitativement le fonctionnement de l'anneau de garde.
- 14 – À partir de l'équation de diffusion thermique, déterminer la forme générale que prend la fonction $T(x)$ en régime stationnaire dans les échantillons.
- 15 – Définir la notion de résistance thermique d'une plaque échantillon de surface s et d'épaisseur e et déterminer son expression.
- 16 – Trouver le ou les intérêts dans l'utilisation d'un dispositif expérimental « symétrique », utilisant deux échantillons quasi-identiques de part et d'autre de la plaque chauffante au lieu d'un.
- 17 – Déterminer l'expression de la conductivité thermique λ du matériau constituant les échantillons en fonction des épaisseurs respectives e_{\uparrow} et e_{\downarrow} des échantillons 1 et 2, des écarts de température ΔT_{\uparrow} et ΔT_{\downarrow} et de la densité moyenne de flux thermique φ_S . Indiquer les hypothèses nécessaires à la détermination expérimentale de cette conductivité thermique. En donnant quelques exemples pratiques, préciser les conditions expérimentales qui permettraient au mieux de respecter ces hypothèses. Expliquer pourquoi ce dispositif fonctionne essentiellement pour des matériaux isolants.

Avec un dispositif similaire à celui qui est décrit dans ce sujet (figure 2), un laboratoire a mesuré la conductivité thermique de deux échantillons d'un isolant de laine de coton (ECOPEG Ouate 39 75 mm) fabriqué à partir de produits recyclés et disponible en magasin de bricolage. Les deux plaques échantillons avaient la même épaisseur $e = 75,0$ mm. Pour une densité moyenne de flux thermique φ_S égale à $7,56 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, les mesures qui ont été effectuées sont données dans la table 1.

	Température face chaude (°C)	Température face froide (°C)
Echantillon 1	17,4	2,5
Echantillon 2	17,5	2,5

TABLE 1 – Données expérimentales. Mesures sur isolant ECOPEG Ouate 39 75 mm.

- 18 – Déterminer la conductivité thermique du matériau étudié. Commenter la valeur trouvée.
- 19 – La capacité thermique massique de l'isolant précédent est de l'ordre de $c_v = 1,5 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et sa masse volumique $\mu = 1,8 \times 10^1 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime stationnaire dans les plaques échantillons précédentes. Commenter.

II.3 – Dispositif des cylindres coaxiaux

Pour mesurer la conductivité d'un fluide, il est nécessaire d'envisager un autre type de dispositif expérimental.

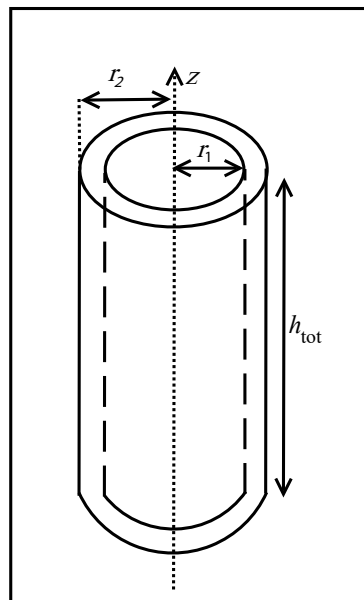


FIGURE 3 – Dispositif des cylindres coaxiaux.

On considère dans cette partie un dispositif constitué de deux cylindres coaxiaux sans anneaux de garde (figure 3). Il s'agit à nouveau d'une méthode de mesure en régime stationnaire mais dans une géométrie différente : on place un fluide entre deux surfaces cylindriques de rayons r_1 et r_2 , de hauteur h_{tot} , de même axe (Oz) et séparées par un faible intervalle. Un élément chauffant est placé dans le cylindre intérieur. On mesure la différence de température entre les deux cylindres à l'aide de thermocouples. Afin de minimiser les transferts thermiques par rayonnement, on choisit des matériaux de faible émissivité pour fabriquer les cylindres (l'argent, qui a une grande conductivité thermique, peut être un bon candidat).

- 20 – Comparer les différents modes de transferts thermiques dans un fluide et un solide. On prendra soin de bien définir ces différents modes.

- 21 – Pour comparer le transport diffusif de la chaleur avec le transport convectif de la chaleur dans un fluide, on peut introduire un nombre sans dimension appelé nombre de Péclet thermique faisant intervenir, la vitesse caractéristique V du transport convectif, la diffusivité thermique D_{th} ainsi que la distance caractéristique de variation de l'écoulement l . Donner l'expression du nombre de Péclet, en le définissant comme le rapport du flux thermique convectif sur le flux thermique diffusif.
- 22 – Expliquer l'intérêt d'utiliser un faible espacement annulaire entre les deux cylindres dans lequel on place le fluide. En pratique, cet espacement annulaire $r_2 - r_1$ est typiquement compris entre 0,2 et 0,3 mm.

Dans la suite, on utilise les coordonnées cylindriques associées à l'axe de révolution (Oz) des cylindres.

- 23 – En supposant le régime stationnaire, les effets de bord négligeables et en invoquant des propriétés de symétrie, déterminer les paramètres dont dépend le champ scalaire de température $T(M)$.
- 24 – La température de la surface cylindrique intérieure (en $r = r_1$) est notée T_1 et celle de la température de la surface extérieure (en $r = r_2$) est notée T_2 . Il n'y a pas de production de chaleur entre les deux cylindres et on suppose le régime stationnaire établi. Établir une propriété sur le flux radial de chaleur $\Phi(r)$ traversant une surface cylindrique quelconque d'axe (Oz) et de rayon r ($r_1 < r < r_2$). En déduire la forme générale du champ des températures entre les deux cylindres (si nécessaire, on introduira des constantes).
- 25 – On suppose la température continue en $r = r_1$ et $r = r_2$. En déduire la relation existant entre le flux de chaleur radial $\Phi(r)$ et la différence de température $\Delta T = T_1 - T_2$. Définir la notion de résistance thermique dans cette géométrie et déterminer son expression.

Dans le dispositif expérimental utilisé : $r_1 = 18,5$ mm et $r_2 = 18,8$ mm. On détermine le flux de chaleur radial $\Phi(r)$, produit par effet Joule dans le cylindre interne, en connaissant la résistance chauffante d'une valeur de $R_{chauf} = 53,5 \Omega$ et la tension à laquelle elle est soumise $U_{chauf} = 40,0$ V. On veut étudier la conductivité thermique d'une huile de moteur (SAE 40) avec le dispositif décrit ici. On mesure $T_1 = 32,9^\circ\text{C}$ et $T_2 = 28,2^\circ\text{C}$. La surface effective de chauffe sur le cylindre interne est de $S_{eff} = 2\pi r_1 h_{tot} = 1,33 \times 10^{-2}$ m².

- 26 – Déterminer littéralement puis numériquement la conductivité thermique de l'huile étudiée.
- 27 – En supposant que les incertitudes prédominantes sont celles sur la tension de chauffe ($\Delta U_{chauf} = 0,5$ V) et celle sur la mesure de température ($\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0,2^\circ\text{C}$), déterminer l'incertitude relative sur la conductivité thermique précédente (toutes les incertitudes considérées ici sont des incertitudes élargies à 95 %) puis présenter le résultat de la mesure et son incertitude élargies à 95 % associée.

Avec ce dispositif, une grande variété de fluides peut être étudiée. En particulier ce dispositif a été utilisé pour étudier la conductivité thermique de l'eau et dans ce dernier cas, de grandes plages de température et de pression ont été explorées.

II.4 – La méthode Flash

Dans cette partie, le principe d'une méthode de mesure de diffusivité thermique d'un solide en régime dépendant du temps, introduite en 1960, va être présentée¹.

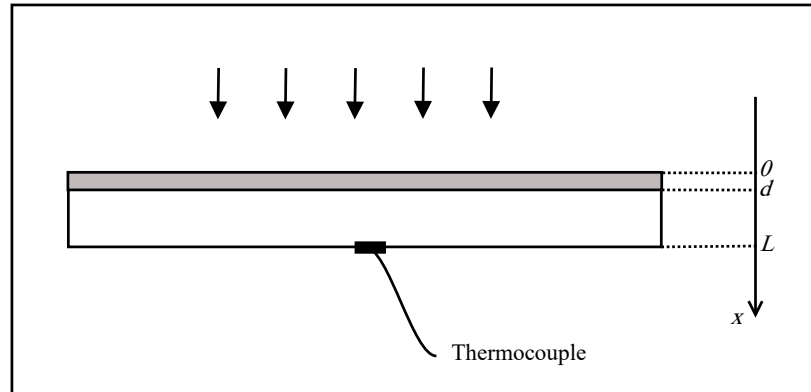


FIGURE 4 – Principe de la méthode flash.

Le schéma de principe de la méthode Flash est décrit sur la figure 4. Cette méthode consiste à soumettre la face avant d'un échantillon à faces parallèles à une impulsion de chaleur de courte durée, à l'aide de lampes forte puissance (lampes flash) ou de lasers et à observer l'évolution temporelle de la température en un point de la face arrière à l'aide par exemple d'un thermocouple ou d'un détecteur de rayonnement (photodiode infrarouge). Cette méthode, assez simple, s'est répandue dans les laboratoires de métrologie mais elle nécessite un certain nombre de précautions expérimentales pour atteindre une bonne précision.

On suppose qu'à $t = 0$, l'excitation flash est infiniment brève dans le temps et uniforme sur la face avant. On va ensuite supposer que la chaleur se propage dans l'échantillon dans la direction (Ox) uniquement, et que les pertes thermiques sont négligeables (expérience adiabatique). On suppose l'échantillon homogène. On note L l'épaisseur totale de l'échantillon et d l'épaisseur de la couche de l'échantillon chauffée par l'impulsion lumineuse à l'instant initial.

À l'instant initial, on fait l'hypothèse que dans la fine couche d'épaisseur d de l'échantillon du côté de la face chauffée, la température subit une élévation instantanée ΔT_0 , tandis que dans le reste de l'échantillon, la température ne subit aucune modification, elle est uniforme et égale à la température T_i . Ainsi les conditions initiales peuvent s'écrire :

$$T(x,t = 0) = \Delta T_0 + T_i \text{ pour } 0 < x < d \text{ et } T(x,t = 0) = T_i \text{ pour } d < x < L.$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on va supposer qu'aucune perte de chaleur ne se produit sur les faces avant et arrière de l'échantillon, supposées isolées thermiquement.

- 28** – On cherche à connaître le champ de température $T(x,t)$ au sein de l'échantillon. Ecrire l'équation vérifiée par $T(x,t)$ puis chercher une solution de cette équation sous la forme : $T(x,t) = T_i + f(x)g(t)$. Déterminer la forme générale des fonctions $f(x)$ et $g(t)$ dans laquelle figurent des constantes qu'il reste à déterminer.

1. Parker, W.J., Jenkins, R.J., Butler, C.P. & Abbott, G.L. 1961, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity", Journal of Applied Physics, vol. 32, no. 9, pp. 1679-1684.

- 29 – Ecrire les conditions aux limites que doit vérifier le flux thermique en $x = 0$ et $x = L$ et en déduire des informations sur la solution générale précédente $T(x,t)$.
- 30 – On cherche maintenant à trouver une solution de l'équation de diffusion qui vérifie non seulement les conditions aux limites mais également la condition initiale. Déterminer la forme générale du champ de température $T(x,t)$ répondant à la question posée.

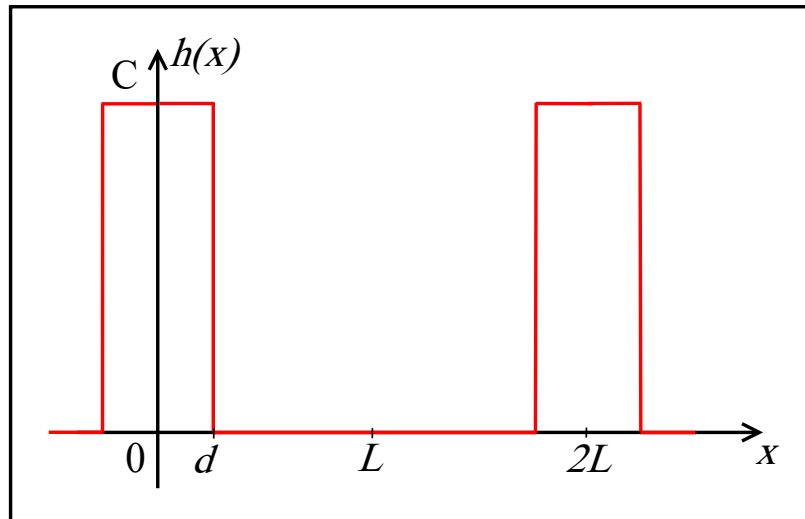


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction $h(x)$.

On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier de la fonction paire $2L$ périodique $h(x)$ représentée sur la figure 5 :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1)$$

avec

$$D_0 = \frac{d}{L} C \quad (2)$$

et

$$D_n = 2D_0 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}d\right)}{\frac{n\pi}{L}d}. \quad (3)$$

- 31 – Pour des temps infiniment longs, déterminer la température d'équilibre T_{eq} de l'échantillon. Commenter.
- 32 – Si on suppose que l'épaisseur d est suffisamment petite pour faire des calculs à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{d}{L}$, montrer que la température sur la face arrière de l'échantillon peut s'exprimer de la manière suivante :

$$T(L,t) \approx T_i + (T_{eq} - T_i) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-D_{th}t \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right) \right]. \quad (4)$$

- 33 – Simplifier au maximum l'expression précédente pour les temps longs. À l'aide de l'expression obtenue, déterminer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la variation de la température sur la face arrière $T(L,t) - T_i$ atteint la moitié de sa valeur maximale à l'équilibre $T_{eq} - T_i$.

Sur la figure 6 est représentée une courbe expérimentale obtenue avec la méthode flash. L'échantillon étudié, à base d'oxyde d'aluminium (pureté 99,8 %), a pour épaisseur $L = 2,0$ mm. L'expérience a été réalisée à une température moyenne de 200°C . En ordonnée, figure le signal du capteur, délivrant une tension qui est une fonction affine de la température (en $^\circ\text{C}$). Le pic situé entre $0 < t < 0,1$ s correspond à l'instant où le flash est envoyé.

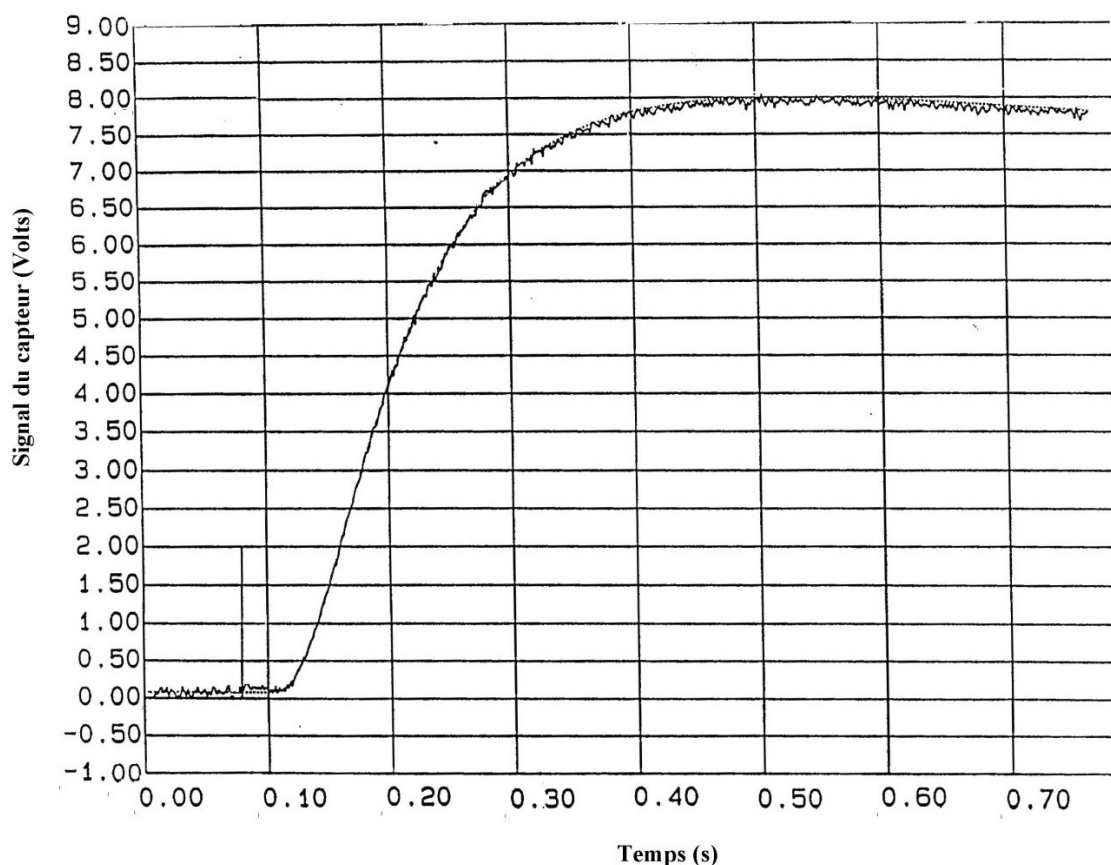


FIGURE 6 – Tracé expérimental de $T(L,t)$ pour de l'oxyde d'aluminium.

- 34 – Commenter la forme de la courbe expérimentale de la figure 6 et en particulier en la comparant à celle attendue théoriquement (il sera intéressant de se demander si une ou plusieurs hypothèses formulées dans le modèle ne sont pas remises en question au vu de la courbe).
- 35 – Déterminer la diffusivité thermique de l'échantillon.
- 36 – Citer des sources d'erreurs majeures responsables des incertitudes de la méthode de mesure de diffusivité thermique décrite dans cette partie. Citer également des avantages

de cette méthode.

- 37 – En appliquant le premier principe de la thermodynamique à l'échantillon étudié au cours du processus de mesure, proposer une méthode de mesure de la capacité thermique C de l'échantillon. Expliquer l'intérêt d'une telle mesure.

III – Diffusion de quantité de mouvement

On s'intéresse dans cette partie à la diffusion de la quantité de mouvement dans un fluide newtonien en écoulement incompressible.

- 38 – Donner deux exemples de fluides non newtoniens et préciser qualitativement pourquoi, du point de vue microscopique, ils sont non newtoniens.

III.1 – Force de viscosité et approche microscopique de la diffusion de la quantité de mouvement

On considère dans cette partie l'écoulement stationnaire de cisaillement de Couette plan (figure 7) : il s'agit d'un écoulement incompressible de fluide newtonien visqueux entre deux plaques parallèles infinies distantes de a . Une plaque est maintenue fixe (celle du dessous en $z = 0$) et l'autre (en $z = a$) se déplace parallèlement à elle-même à une vitesse constante V_0 suivant une direction (Ox) . On modélise alors le champ des vitesses de la manière suivante :

$$\vec{v}(M) = v_x(z)\vec{u}_x = \frac{V_0}{a}z\vec{u}_x.$$

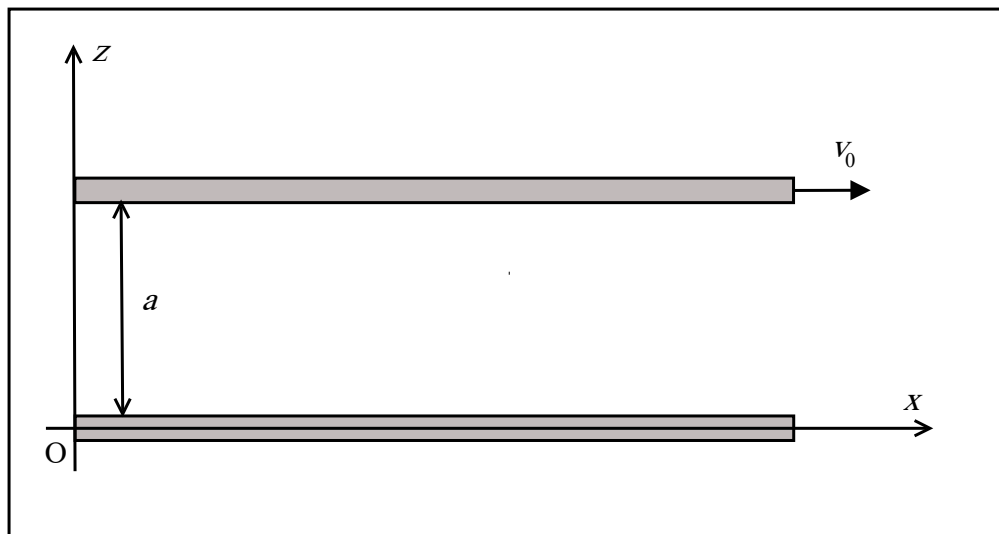


FIGURE 7 – Schéma du dispositif de Couette plan.

- 39 – Définir, pour cet écoulement, le coefficient de viscosité dynamique η du fluide, en donnant l'expression de la force de viscosité exercée sur un élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$, situé à la côte z , par le fluide situé au-dessus de z sur le fluide situé en dessous de z en fonction du champ des vitesses $v_x(z)$.

Donner la dimension et l'unité du coefficient de viscosité dynamique η . Préciser les paramètres dont dépend cette grandeur physique.

Donner l'ordre de grandeur de ce coefficient dans le cas du glycérol pur.

On donne, pour la suite du problème, à la température de 20 °C et à pression atmosphérique, le coefficient de viscosité de l'eau $\eta = 1,0 \times 10^{-3}$ Pl et celui de l'air $\eta = 1,8 \times 10^{-5}$ Pl.

- 40 – Expliquer en quoi la force de viscosité traduit une diffusion de la quantité de mouvement et préciser la direction dans laquelle s'effectue cette diffusion. Proposer un dispositif de diffusion thermique analogue au dispositif de Couette plan. Préciser alors l'analogie du champ des vitesses et la loi analogue de la loi de Fourier.

On va s'intéresser à l'origine physique de cette diffusion et on va adopter une approche microscopique qualitative dans le cadre de la théorie cinétique des gaz dilués (le modèle étudié ici ne s'applique donc pas au cas des liquides).

On considère d'abord comme système microscopique une molécule de gaz de masse m à l'intérieur d'une particule fluide à l'échelle mésoscopique. Du fait de l'agitation thermique, on peut faire l'hypothèse suivante : une molécule possède une vitesse $\vec{v}_{\text{mol}} = \vec{u} + v_x(z)\vec{u}_x$, où $v_x(z)\vec{u}_x$ représente la vitesse de la particule fluide contenant la molécule, dans l'écoulement stationnaire de Couette plan, et \vec{u} représente la vitesse d'agitation thermique (en général très supérieure à la vitesse de déplacement de l'ensemble). On va considérer un modèle simpliste et isotrope de la distribution en vitesse d'agitation thermique des molécules : 1/3 seulement des molécules se déplace dans une des trois directions de l'espace (Ox), (Oy) ou (Oz) avec une vitesse de norme u que l'on peut assimiler à la vitesse quadratique moyenne. En outre, on suppose que toutes les molécules ont leurs chocs aux mêmes instants et que la durée entre deux chocs vaut $\tau = l/u$, où l représente le libre parcours moyen dans le gaz. On désigne par n la densité moléculaire (nombre de molécules par unité de volume), supposée uniforme.

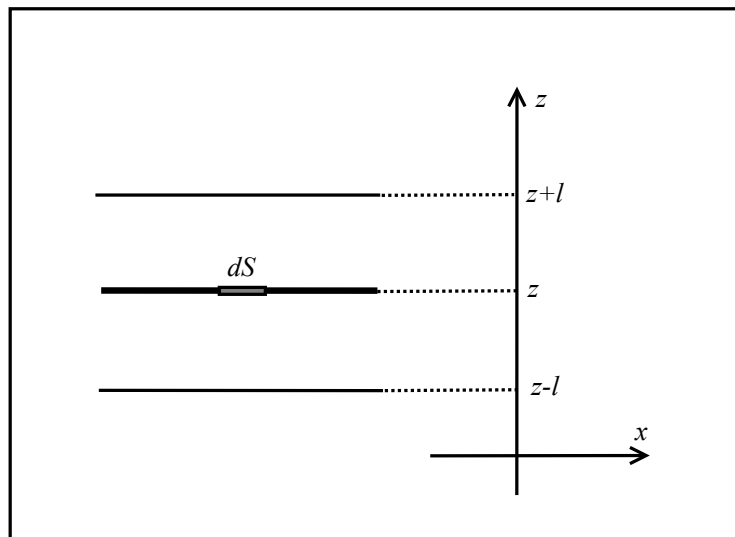


FIGURE 8 – Échange de molécules à la cote z .

On souhaite effectuer un bilan de quantité de mouvement longitudinale dP_x cédée par la

particule de fluide située au-dessus de la cote z à la particule fluide située en-dessous de la cote z (voir figure 8) pendant τ afin de pouvoir estimer la composante dans la direction (Ox) de la force d'interaction entre les deux particules considérées.

- 41 – On note dS la surface élémentaire longitudinale en contact entre deux particules fluides à la cote z (voir figure 8). En raisonnant pendant une durée τ (ce qui revient à découper l'espace en cellules de taille égale à l), calculer la quantité de mouvement moyenne dP_x^{haut} dans la direction (Ox) de l'ensemble des molécules traversant pendant une durée τ l'unité de surface dS à la cote z et venant du haut. Faire de même pour les molécules venant du bas. En déduire la quantité de mouvement dP_x cherchée.
- 42 – En déduire la composante tangentielle $dF_x/dS = \frac{1}{\tau} \frac{dP_x}{dS}$ de la force par unité de surface exercée à la cote z de la part du fluide du dessus sur celui du dessous et en déduire l'expression du coefficient η en fonction des grandeurs m , n , u et l .
- 43 – On rappelle que le libre parcours moyen l est donné par le résultat classique de la théorie cinétique des gaz $l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_C}$, où σ_C est la section efficace de collisions. Exprimer le coefficient η en fonction de m , la température T et σ_C . Commenter la dépendance de η en fonction de la température T en comparant ce sens d'évolution avec la variation de η avec T dans les liquides.
- 44 – Calculer numériquement le coefficient η dans cas de l'atome d'hélium à température ambiante. On donne $\sigma_C = 5 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ et on rappelle que la masse molaire de l'atome d'hélium est $4,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

III.2 – Équation de diffusion

Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, on peut montrer que l'équivalent volumique des forces de viscosité s'écrit : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

- 45 – On considère un écoulement de fluide visqueux, de viscosité dynamique η , de vitesse caractéristique U^* , de dimension caractéristique L^* et de masse volumique μ . Rappeler la définition et l'expression du nombre de Reynolds Re .
- 46 – Dans le cas d'un écoulement d'un fluide newtonien incompressible de très faible nombre de Reynolds ($Re \ll 1$), retrouver l'équation de diffusion que vérifie le champ des vitesses dans le fluide dans le cas où on néglige toutes les forces autres que les forces de viscosité. Discuter la validité de l'hypothèse $Re \ll 1$ pour l'obtention de l'équation de diffusion. Déterminer le coefficient de diffusion associé D_{visc} , appelé couramment viscosité cinématique. Donner l'ordre de grandeur de D_{visc} dans le cas du glycérol pur, de l'air et de l'eau. Commenter.
- 47 – En reprenant le modèle microscopique du paragraphe III.1 – de la viscosité dans le cas d'un gaz, exprimer le coefficient D_{visc} en fonction des paramètres u et l . Lorsque l'on effectue une approche microscopique de la diffusion de la chaleur dans le cadre du même modèle, en étudiant cette fois l'échange d'énergie interne et non de la quantité de mouvement entre particules fluide, on trouve pour D_{th} : $D_{\text{th}} = \frac{ul}{2}$. Conclure.

III.3 – Frottement fluide sur une plaque en mouvement rectiligne uniforme

Dans cette partie, on souhaite maintenant s'intéresser à la diffusion de la quantité de mouvement en régime non stationnaire.

Un fluide newtonien de masse volumique μ , de viscosité dynamique η , en écoulement incompressible, occupe le demi-espace $z > 0$, l'axe (Oz) correspondant à un axe vertical ascendant. En $z = 0$ se situe une plaque horizontale infinie.

Le fluide et la plaque étant au repos aux instants $t < 0$, on met en mouvement la plaque d'équation $z = 0$ avec une vitesse constante $U_0 \vec{u}_x$ à partir de l'instant $t = 0$.

48 – À partir de considérations d'invariance, déterminer la forme du champ de pression. Faire de même avec le champ des vitesses en supposant un écoulement de cisaillement.

On cherche un champ des vitesses de la forme $\vec{v}(M,t) = f(u) \vec{u}_x$ avec $u = \frac{z}{\sqrt{D_{\text{visc}} t}}$ un paramètre sans dimension.

49 – Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u \rightarrow f(u)$.

50 – En posant $F(u) = f'(u)$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par F puis la résoudre en gardant une constante multiplicative que l'on déterminera dans la question suivante.

51 – En déduire que : $f(u) = U_0(1 - \text{erf}(\frac{z}{2\sqrt{D_{\text{visc}} t}))$. Commenter cette expression.

On rappelle que la fonction erreur est définie par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (5)$$

avec : $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erf}(x) = 1$ et $\text{erf}(0) = 0$.

52 – Déterminer l'ordre de grandeur de la distance caractéristique de la diffusion de la perturbation pour $t = 10$ s et $t = 1$ h pour l'eau et l'air. Commenter.

53 – Calculer la force tangentielle $d\vec{f}$ subie par un élément de surface dS de la plaque mobile et commenter.

54 – Décrire le dispositif expérimental analogue au dispositif décrit ci-dessus faisant intervenir la diffusion de chaleur. Décrire également celui faisant intervenir la diffusion de particules.

III.4 – Viscosimètre de Couette

On va étudier dans cette partie le principe d'un viscosimètre inventé par M. Couette en 1890. Ce type de viscosimètre est utilisé dans certains secteurs industriels pour la mesure de la viscosité de polymères liquides, de peintures, de ciments, de fluides agroalimentaires (chocolat fondu, sauce tomate, jus de fruit...) mais aussi dans des secteurs de la recherche fondamentale. Ce dispositif ressemble au dispositif étudié dans la partie II.3, pour la mesure de la conductivité thermique d'un fluide.

Le liquide dont on veut étudier la viscosité est placé entre deux cylindres coaxiaux verticaux de hauteur H (l'axe (Oz) est un axe vertical ascendant). Le cylindre intérieur, de rayon

R_1 , est fixe (figure 9). Le cylindre extérieur de rayon R_2 est animé, à l'aide d'un moteur, d'un mouvement de rotation à une vitesse de rotation constante $\Omega > 0$. En régime stationnaire, le cylindre intérieur est maintenu immobile grâce à un couple Γ qu'on lui impose.

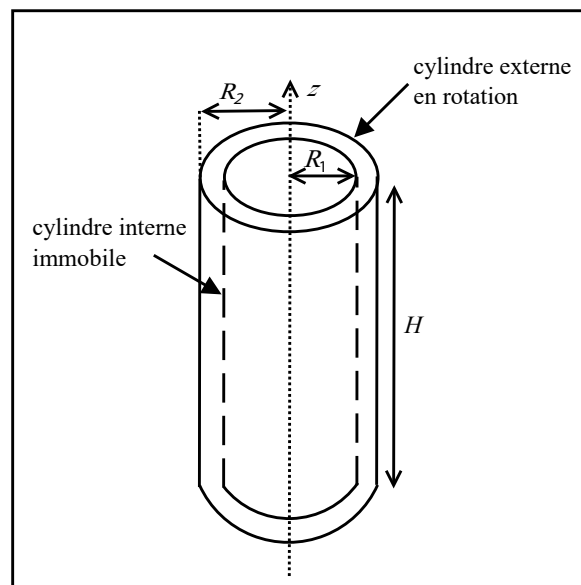


FIGURE 9 – Schéma de principe du viscosimètre de Couette.

55 – Sachant que la mesure de la viscosité s'effectue en régime stationnaire, décrire le principe de fonctionnement d'un tel appareil. Préciser la direction dans laquelle s'effectue la diffusion de la quantité de mouvement. Préciser également la direction dans laquelle s'effectue le transport convectif de la quantité de mouvement.

56 – On utilise le repère cylindrique associé à l'axe commun aux deux cylindres, l'axe (Oz) . Prévoir de quelles variables dépend le champ de pression et le champ des vitesses.

On admet par la suite que l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire et que le champ des vitesses peut s'écrire en régime stationnaire : $\vec{v}(M) = v_\theta(r)\vec{u}_\theta$.

Compte tenu de la forme du champ des vitesses, on admet l'expression de la force surfacique de viscosité exercée sur un élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$ par le fluide situé au-delà de r sur le fluide situé en deçà de r : $d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) dS\vec{u}_\theta$.

57 – On considère le système constitué du fluide compris entre le cylindre de rayon r et le cylindre de rayon $r + dr$ et de hauteur H . On suppose le régime stationnaire établi. En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire à ce système par rapport à l'axe (Oz) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, déterminer le champ des vitesses $v_\theta(r)$.

58 – Déterminer le couple Γ qu'il est nécessaire d'appliquer au cylindre de rayon R_1 pour le maintenir immobile. Puis en déduire l'expression de la viscosité η en fonction du couple Γ et des autres paramètres de l'expérience.

59 – On place un liquide de viscosité inconnue dans le viscosimètre de Couette décrit pré-

cédement.

Ce dispositif a pour dimensions $R_1 = 45,0$ mm, $R_2 = 45,4$ mm et $H = 150,0$ mm. On mesure pour $\Omega = 102$ tours/minute un couple $\Gamma = -142 \times 10^{-3}$ N · m. Déterminer la viscosité du liquide étudié.

- 60 – Sur l'exemple numérique précédent, on constate que $R_2 - R_1 = e_c \ll R_1$. Déterminer la forme simplifiée du champ des vitesses dans cette approximation. Commenter.
- 61 – Préciser s'il est équivalent d'avoir un cylindre interne tournant et un cylindre externe fixe sur ce type de rhéomètre. On justifiera sa réponse.

IV – Diffusion de la matière

IV.1 – Loi de Fick et diffusion de particules

On s'intéresse donc à la diffusion de particules de concentration molaire $c(M,t)$ (en mol·m⁻³) vérifiant l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{mol}} \Delta c \quad (6)$$

où D_{mol} est le coefficient de diffusion des particules considérées.

- 62 – Rappeler la loi de Fick reliant le gradient de concentration au vecteur densité de courant de particules que l'on notera \vec{j} et dont l'unité ici est le mol·m⁻²·s⁻¹.
- 63 – Décrire une expérience quantitative de diffusion de particules qui pourrait être mise en œuvre en travaux pratiques avec des élèves.

IV.2 – Évaporation d'une goutte d'eau sphérique.

L'objectif de cette sous-partie est d'étudier la dynamique d'évaporation d'une goutte d'eau sphérique dans deux situations : une situation d'atmosphère non saturée et une situation d'atmosphère saturée. Le système de coordonnées à utiliser est naturellement le système de coordonnées sphériques dans lequel r désigne la distance au centre de la goutte.

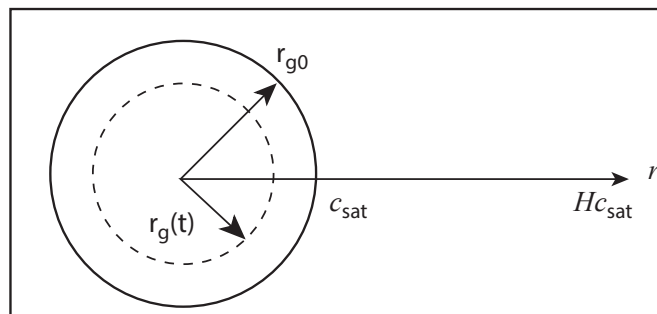


FIGURE 10 – Goutte isolée en présence d'air humide.

Cas a) : Évaporation d'une goutte d'eau sphérique en atmosphère humide. On considère une goutte de rayon initial $r_{g0} = 1,0 \cdot 10^{-1}$ mm dans une atmosphère d'air humide d'humidité relative H (voir figure 10). On appelle humidité relative le rapport de la pression partielle d'eau sur la pression de vapeur saturante p_{sat} à la température T de l'expérience supposée constante. On note $r_g(t)$ le rayon de la goutte à un instant t donné. On cherche à déterminer l'équation d'évolution de ce rayon $r_g(t)$ au cours du temps.

- 64 – Si le rayon de la goutte n'évolue pas trop vite, on peut supposer qu'à chaque instant, le profil de concentration $c(r,t)$ est le profil d'équilibre, c'est-à-dire qu'il est solution d'une équation de diffusion en régime stationnaire :

$$\Delta c = 0 \quad (7)$$

En utilisant un analogue électrostatique que l'on explicitera, montrer que la solution de cette équation est de la forme :

$$c(r,t) = \frac{A}{r} + B \quad (8)$$

On fait l'hypothèse que $c(r_g(t),t) = c_{\text{sat}}$ où c_{sat} est la concentration volumique (en mol/m³) en eau à saturation. À l'infini, la concentration molaire en eau est fixée par l'humidité relative et vaut Hc_{sat} . Calculer $c(r,t)$.

- 65 – On introduit le taux d'évaporation total $I(t) = -dm/dt$ où $m(t)$ est la masse de la goutte à un instant t . Calculer $I(t)$ en fonction de D_{mol} , r_g , c_{sat} , H et M la masse molaire de l'eau. Commenter la façon avec laquelle le taux d'évaporation dépend du rayon de la goutte. En déduire l'équation d'évolution du rayon de la goutte $r_g(t)$.

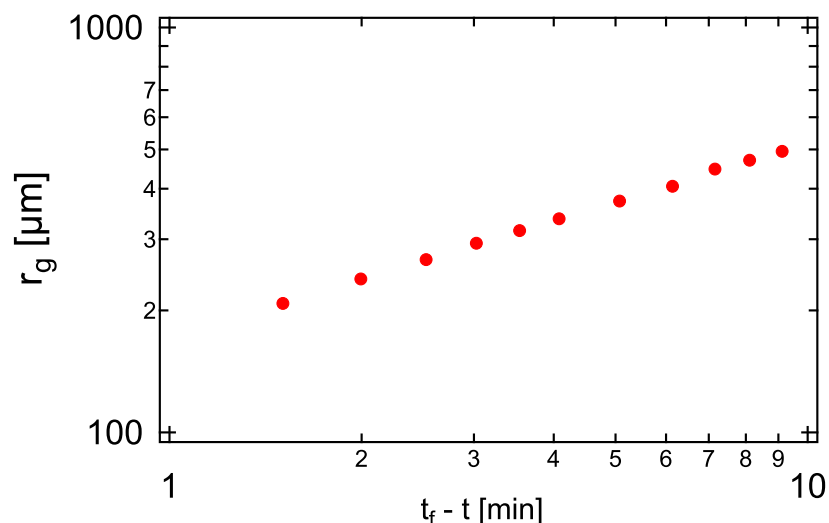


FIGURE 11 – Évolution du rayon d'une goutte d'eau suspendue en train de s'évaporer. On note r_g le rayon de la goutte à un instant t donné et $t_f - t$ la différence entre l'instant où la goutte s'est totalement évaporée (t_f) et l'instant t . $H = 53 \%$ et $T = 292,8$ K.

- 66 – Des expériences² de mesure de l'évolution du rayon de la goutte $r_g(t)$ ont été réalisées. Les résultats sont présentés sur la figure 11 : le rayon d'une goutte suspendue est représenté en fonction de la différence des temps entre l'instant pour lequel la goutte s'est totalement évaporée t_f et l'instant t . Les expériences sont réalisées à la température $T = 292,8$ K. On donne la masse volumique de l'eau $\mu = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³, sa pression de vapeur saturante $p_{\text{sat}} = 2,3$ kPa et sa masse molaire $M = 18$ g.mol⁻¹. On fait l'hypothèse que la vapeur d'eau est un gaz parfait. Commenter l'allure de la courbe obtenue sur la figure 11. Déduire de la figure la valeur du coefficient de diffusion de l'eau.
- 67 – En pratique, pour réaliser une telle expérience, il faut : 1) fabriquer une goutte millimétrique « en suspension » ou presque, 2) la placer dans une atmosphère contrôlée en humidité. Expliquer comment on pourrait en pratique, réaliser cette expérience.
- 68 – On a fait ici l'approximation du régime quasi-stationnaire. Justifier que cette hypothèse est vérifiée dans l'expérience précédente.

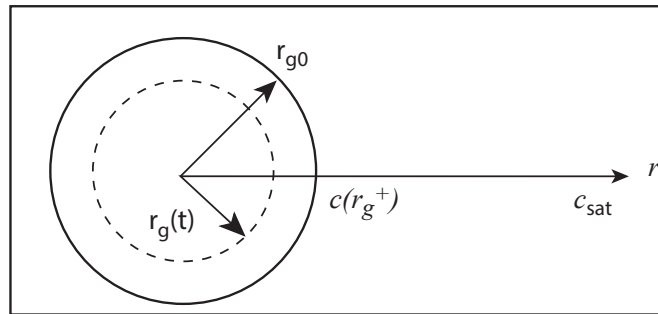


FIGURE 12 – Goutte d'eau en présence d'une vapeur saturée.

Cas b) : Évaporation d'une goutte d'eau sphérique en atmosphère saturée. On considère maintenant l'évolution du rayon d'une goutte d'eau de rayon initial $r_{g0} = 50$ nm à $T = 293$ K en présence d'une vapeur saturée (figure 12). On va tenir compte du fait que la goutte présente une tension de surface γ .

- 69 – Rappeler rapidement l'origine de la tension de surface d'un liquide. En déduire un argument physique pour justifier l'ordre de grandeur de la valeur de la tension de surface de l'eau/air, qui à 25 °C est $\gamma_{\text{eau}} = 72,0$ mN.m⁻¹.
- 70 – Rappeler la loi de Laplace donnant la différence de pression de part et d'autre d'une interface courbée dans le cas particulier où la particule est sphérique et en déduire la différence de pression $p_l - p_v(r_g^+)$ où p_l désigne la pression de l'eau dans la goutte et $p_v(r_g^+)$ la pression partielle en vapeur au voisinage de la goutte.

On suppose l'équilibre thermodynamique de l'eau entre la phase liquide et la phase vapeur, i.e. : $\mu_l(p_l, T) = \mu_v(p_v, T)$ où μ_l et μ_v sont respectivement les potentiels chimiques molaires

2. Données issues de FUCHS, Nikolai Albertovich. *Evaporation and droplet growth in gaseous media*. Elsevier, 2013.

de l'eau dans la phase liquide et dans la phase vapeur.

71 – Justifier que :

$$\mu_l(p_l, T) \approx \mu_l(p_{\text{sat}}, T) + V_m(p_l - p_{\text{sat}}) \quad (9)$$

où V_m est le volume molaire de l'eau liquide.

72 – Préciser à quelles conditions il est possible d'écrire :

$$\mu_v(p_v, T) = \mu_v(p_{\text{sat}}, T) + RT \ln \left(\frac{p_v}{p_{\text{sat}}} \right) \quad (10)$$

Montrer en faisant les approximations nécessaires que l'on peut écrire l'équation de Kelvin :

$$p_v = p_v(r_g^+) \approx p_{\text{sat}} + \frac{2\gamma p_{\text{sat}} V_m}{r_g RT} \quad (11)$$

73 – Justifier qu'une goutte d'eau peut s'évaporer même en présence de vapeur d'eau saturante.

74 – En reprenant un raisonnement analogue au cas (a) (question 66), calculer l'ordre de grandeur du temps que met une goutte de 50 nm pour s'évaporer dans les mêmes conditions de température que dans le cas a. On utilisera le coefficient de diffusion calculé au cas a.

75 – Justifier pourquoi les effets de courbure sur la pression du gaz au voisinage de la goutte ont été négligés dans la question précédente.

IV.3 – Modèle microscopique du transport de particule : mouvement brownien

Dans la section précédente, le transport de particule a été introduit de façon phénoménologique, indépendamment d'un modèle microscopique. Nous allons introduire ici le mouvement brownien d'une particule colloïdale de taille a . On note \vec{r} la position du centre de gravité d'une particule de masse m . La vitesse de la particule est notée \vec{v} . L'équation du mouvement de la particule proposée par Langevin s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\zeta m \vec{v} + \vec{f}(t) \quad (12)$$

avec ζm un coefficient de friction et $\vec{f}(t)$ une force aléatoire due aux chocs des différentes molécules du solvant sur la particule colloïdale de taille a .

76 – Définir « particule colloïdale ».

77 – On écrit que la fonction $\vec{f}(t)$ a les propriétés statistiques suivantes :

$$\langle f_\alpha(t) \rangle = 0 \quad (13)$$

$$\langle f_\alpha(t) f_\beta(t') \rangle = 2g_0 \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') \quad (14)$$

où les indices en lettre grecques correspondent aux directions de l'espace. Les crochets signifient qu'il s'agit de moyennes d'ensemble. $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha\beta} = 0$

si $\alpha \neq \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$) et $\delta(t)$ est la distribution de Dirac. Expliquer ce que signifient physiquement ces deux hypothèses. Commenter les échelles du temps typique entre deux chocs du solvant sur la particule (temps dont on donnera un ordre de grandeur) par rapport au temps caractéristique d'évolution de la vitesse de la particule colloïdale.

78 – En supposant que la friction sur la particule est une force typique de Stokes, donner une expression du coefficient ζm en fonction de la viscosité dynamique du solvant η et de la taille a de la particule.

79 – Écrire sous forme intégrale la solution générale de l'équation de Langevin en l'absence de champ extérieur. On notera $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. En déduire, toujours sous forme intégrale, l'expression de la vitesse quadratique moyenne $\langle v^2(t) \rangle$.

80 – Calculer $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle$. En utilisant le théorème d'équipartition, dont vous rappellerez l'énoncé, déduire :

$$m\zeta k_B T = g_0 \quad (15)$$

Justifier pourquoi cette expression est appelée relation de fluctuation dissipation.

81 – Calculer la fonction de corrélation des vitesses $\langle \vec{v}(t) \vec{v}(t') \rangle$ (on pourra utiliser l'invariance temporelle à l'équilibre). En déduire une interprétation de ζ .

82 – Une intégration de l'équation obtenue à l'équation 81 conduit à :

$$\langle (\vec{r}(t) - \vec{r}(0))^2 \rangle = \frac{6k_B T}{m\zeta} (t + \zeta^{-1} (\exp(-t) - 1)) \quad (16)$$

Tracer l'allure de $\langle (\vec{r}(t) - \vec{r}(0))^2 \rangle$. Identifier ce qui correspond à un régime diffusif. En déduire une expression du coefficient de diffusion de la particule colloïdale en fonction de $k_B T$, et $m\zeta$.

83 – En déduire l'ordre de grandeur de diffusion d'une particule de 5 nm dans un liquide de viscosité dynamique $\eta = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ à température ambiante.

– Fin de l'énoncé. –