

SESSION 2022

---

**AGREGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : PHYSIQUE**

**PROBLÈME DE PHYSIQUE**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

A

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	103	0889

Le sujet comprend 26 pages numérotées de 1 à 26

\* \* \*

## *Autour des champs magnétiques astrophysiques*

L'existence de champs magnétiques dans l'Univers est attestée par plusieurs observations :

- Un *effet Zeeman* observé d'abord sur des raies du spectre solaire, mais par la suite également sur des raies associées au gaz du milieu interstellaire ;
- Un rayonnement diffus observé dans le domaine radio, présentant un fort degré de polarisation linéaire, et qu'on interprète comme un *rayonnement synchrotron* émis par des particules chargées en mouvement relativiste dans le champ magnétique qui baigne le milieu interstellaire ;
- La rotation du plan de polarisation des rayonnements radio polarisés en fonction de la longueur d'onde d'observation, qu'on nomme *effet Faraday*, et qui suggère que le milieu interstellaire constitue un plasma magnétisé ;
- L'existence d'une *polarisation linéaire* de la lumière visible des étoiles, interprétée comme résultant d'une extinction différentielle de cette lumière par des grains de poussière non-sphériques et statistiquement alignés dans le champ magnétique ;
- La *polarisation linéaire* de l'émission thermique infrarouge de ces mêmes grains, observée notamment sur l'ensemble du ciel par le satellite *Planck*.

L'objet de ce problème est l'étude de certains des aspects associés aux champs magnétiques en astrophysique. Il est constitué de trois parties largement indépendantes portant sur les thématiques suivantes :

- La propagation des ondes radio dans un plasma magnétisé
- La polarisation du rayonnement des étoiles par les poussières
- Le rôle du champ magnétique dans la dynamique du milieu interstellaire

Certaines questions de ce sujet nécessitent l'étude de documents ou consistent en des questions de modélisation. Compte-tenu de l'investissement nécessaire pour répondre à ces dernières, elles seront valorisées en conséquence. On veillera à la clarté de la rédaction et au soin apporté à la présentation des résultats.

Un formulaire est disponible en annexe de ce sujet, page 24. On y trouvera notamment des rappels ainsi que des approximations utiles pour les applications numériques.

# I. Champ magnétique interstellaire et rotation Faraday

Dans cette partie du problème, on aborde la propagation de signaux radio astrophysiques dans le milieu interstellaire, qu'on assimile à un plasma baigné dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . On verra ainsi comment utiliser ces signaux pour sonder les propriétés du milieu, notamment la densité des électrons (c'est-à-dire leur nombre par unité de volume) et le champ magnétique. On considère que le plasma est constitué de protons et d'électrons uniquement, et qu'il est globalement neutre électriquement, de sorte que les densités  $n_p$  et  $n_e$  des protons et des électrons sont égales. On les notera donc  $n$  sans distinction, et on supposera le milieu homogène, c'est-à-dire de densité uniforme. On se référera à la Fig. 1 pour les notations. Dans un premier temps (sous-partie **A**), on supposera que le plasma n'est pas magnétisé. On tiendra compte ultérieurement (sous-partie **B**) de la présence du champ magnétique  $\vec{B}$ . Dans toute cette partie, les mouvements des particules sont non relativistes.

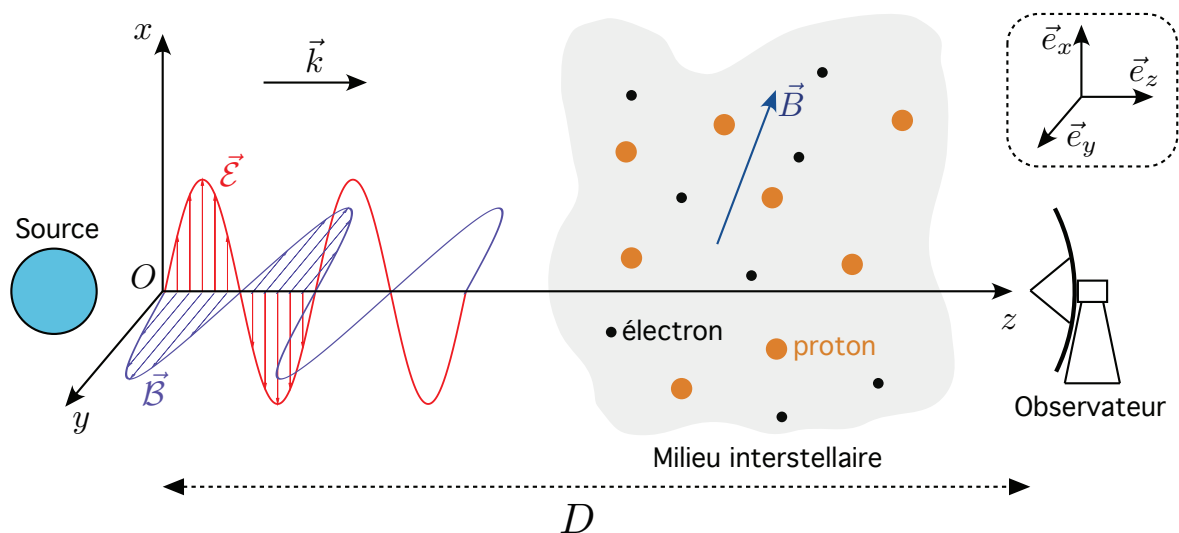


FIGURE 1 – Propagation d'une onde électromagnétique, issue d'une source située à gauche, au travers du milieu interstellaire modélisé comme un plasma d'électrons et de protons, et observée par un radiotélescope situé à droite. Si dans la sous-partie **A** le milieu est considéré comme non magnétisé, en réalité un champ magnétique  $\vec{B}$  est présent dans le milieu interstellaire, comme représenté sur la figure, et on en tient compte dans la sous-partie **B**. Pour des raisons de lisibilité, le milieu interstellaire n'est représenté que partiellement sur ce schéma, mais en réalité il emplit tout l'espace entre la source et l'observateur. On notera  $D$  la distance qui les sépare.

## A. Mesure de dispersion

On considère tout d'abord la propagation dans ce milieu d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique de pulsation  $\omega$ . On note  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  les champs électrique et magnétique associés à cette onde, de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ . Pour les représentations complexes de ces champs, on utilisera la convention en  $e^{-i\omega t}$ , c'est-à-dire qu'on écrira

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}] \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{B}}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}] \quad (1)$$

où  $\underline{\vec{\mathcal{E}}}_0$  et  $\underline{\vec{\mathcal{B}}}_0$  sont des vecteurs complexes constants et la notation  $\text{Re}[X]$  désigne la partie réelle de  $X$ .

**Q1.** Écrire les équations du mouvement non relativiste d'un électron et d'un proton, initialement au repos, au passage de l'onde. On négligera toute interaction hormis la force de Lorentz et on fera l'hypothèse que la composante magnétique de celle-ci est négligeable devant la composante électrique.

**Q2.** En combinant les deux équations obtenues à la question précédente, quelle relation peut-on écrire entre la vitesse  $\vec{v}_p$  des protons et celle  $\vec{v}_e$  des électrons? Quelle approximation est-on alors en droit de faire sur le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$ ?

**Q3.** Écrire les équations de Maxwell et exprimer la variation temporelle du vecteur densité volumique de courant en fonction du champ électrique.

**Q4.** En déduire une équation aux dérivées partielles portant sur  $\vec{\mathcal{E}}$ , puis la relation de dispersion de l'onde électromagnétique sous la forme d'une équation de Klein-Gordon  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$  en explicitant la pulsation plasma  $\omega_p$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .

**Q5.** Discuter la possibilité d'une propagation de l'onde dans le plasma en fonction de  $\omega$ .

**Q6.** Décrire la structure de l'onde pour  $\omega \gg \omega_p$  et justifier *a posteriori* l'hypothèse faite plus haut sur les composantes de la force de Lorentz.

Les *pulsars* sont des étoiles à neutrons en rotation rapide, extrêmement denses, qui ont été découvertes pour la première fois par J. B. Burnell en 1967. Au centre de la nébuleuse du Crabe, dont on peut voir sur la Fig. 2 (à gauche) une image en optique obtenue avec le télescope spatial Hubble, se trouve un tel objet, reste de l'étoile massive qui explosa en supernova en 1054. La masse d'un pulsar est typiquement de l'ordre de  $1,5 M_\odot$  et son rayon d'environ 10 km. L'émission radio observée en provenance des pulsars, typiquement à des fréquences de plusieurs centaines de MHz, se présente sous la forme de *pulses* réguliers, qui se répètent avec une période très courte ( $T \sim 2 \text{ ms} - 10 \text{ s}$ ) reflétant la rotation rapide de l'objet. Ces pulses, qu'on observe également dans le reste du spectre électromagnétique, comme le montre l'exemple du pulsar du Crabe (Fig. 2, à droite), peuvent être vus comme des paquets d'ondes, ce qui invite à généraliser le modèle monochromatique vu jusqu'à présent.

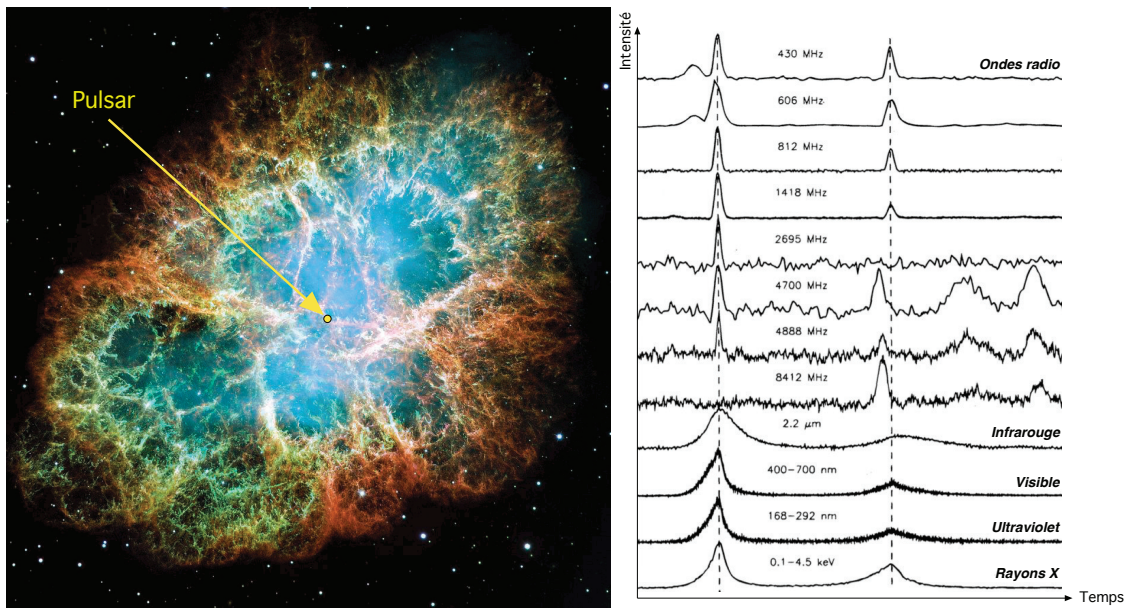


FIGURE 2 – Sur l'image de gauche, la nébuleuse du Crabe observée en optique par le télescope spatial Hubble (Crédit : NASA/STScI). Les "pulses" d'émission issus du pulsar qui se trouve au centre de la nébuleuse sont représentés en fonction du temps sur les courbes à droite, pour différentes fréquences, des ondes radio en haut aux rayons X en bas. La durée totale représentée sur chaque courbe correspond à une période unique de rotation du pulsar, à savoir 33,736 ms. (Figure adaptée de D. A. Moffett & T. H Hankins, *The Astrophysical Journal*, 468, 779, 1996 [<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9604163>]).

La réponse à la question Q7 nécessite d'y consacrer un temps suffisant, et sera valorisée en conséquence, en évaluant non seulement le résultat mais aussi la démarche proposée.

**Q7.** Expliquer qualitativement pourquoi ces objets en rotation très rapide doivent effectivement être très denses pour être stables. En déduire une estimation quantitative d'une limite inférieure à la masse volumique  $\rho$  de l'objet, en fonction de sa période de rotation  $T$  et de la constante  $G$ . Faire l'application numérique pour le pulsar du Crabe et proposer une comparaison à même de faire comprendre aux élèves à quel point ces astres sont denses.

**Q8.** Calculer la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  d'un paquet d'ondes se propageant dans le plasma décrit aux questions Q1 à Q6, en fonction de  $c$ ,  $\omega$  et  $\omega_p$ .

**Q9.** Dans le milieu interstellaire dit "diffus", on a typiquement  $n_e \approx 0,03 \text{ cm}^{-3} = 3 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$ . Évaluer la fréquence plasma  $\nu_p$  dans ce milieu, et justifier que l'émission radio du pulsar peut nous parvenir.



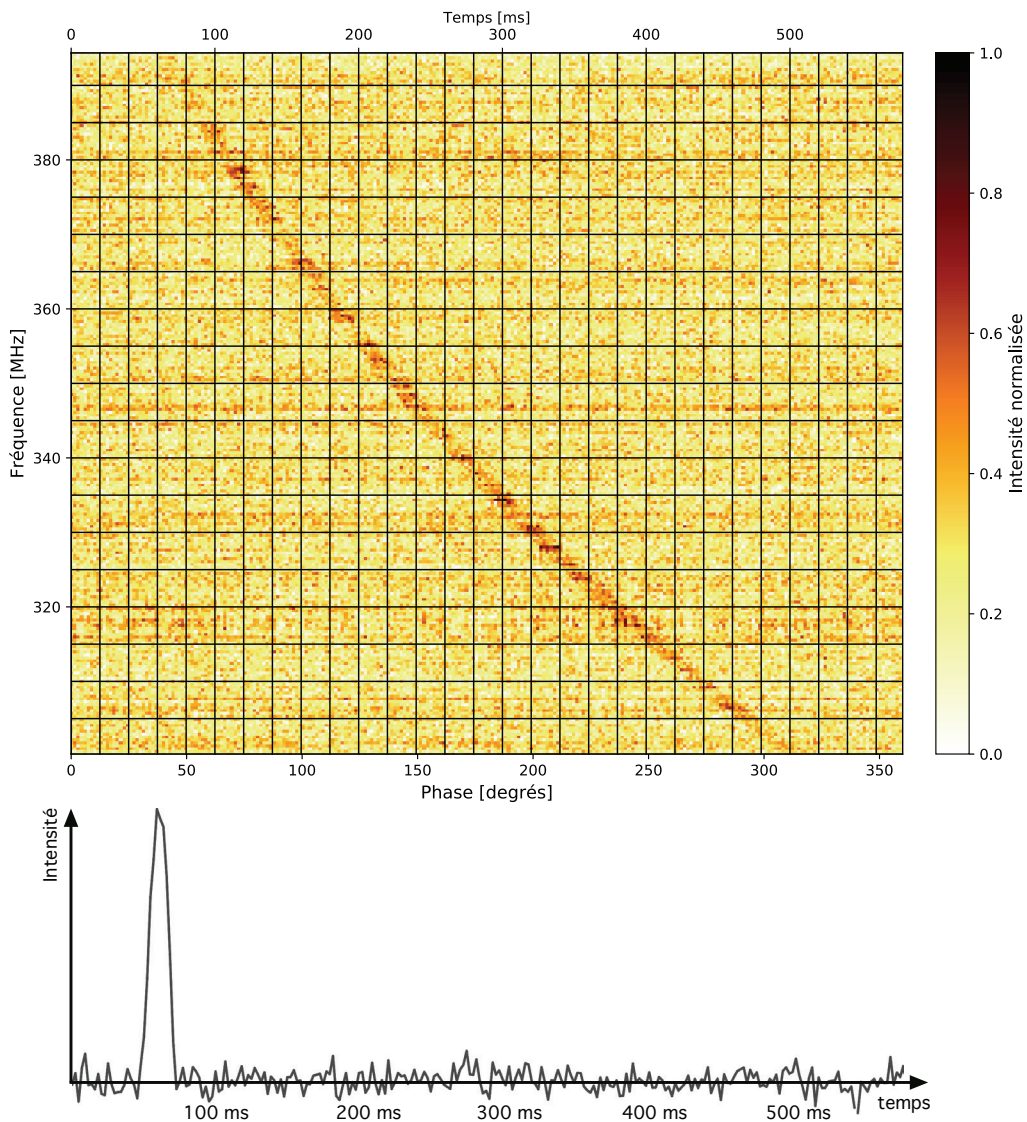


FIGURE 3 – Données d’observation du pulsar J1800+5034. Sur le panneau supérieur, on représente en échelle de couleur l’intensité du signal radio reçu (normalisée à sa valeur maximale), en fonction du temps (axe des abscisses), et pour différentes fréquences (axe des ordonnées). On notera la présence de deux axes des abscisses, l’un en temps (axe supérieur) et l’autre en phase (axe inférieur), laquelle repère la rotation sur lui-même du pulsar. La période de rotation de l’objet est  $T = 578,368$  ms. Le quadrillage superposé à l’image a un pas de 20 ms en temps et 5 MHz en fréquence. Sur le panneau inférieur, les pulses observés à des fréquences différentes ont été "dé-dispersés" puis moyennés. On observe ainsi "le" profil du pulse en fonction du temps. Ces données sont issues de "Essential Radio Astronomy" (J. J. Condon & S. M. Ransom, 2016, [<https://science.nrao.edu/opportunities/courses/era>]).

**Q10.** On note  $\Delta t$  le temps d'arrivée sur Terre d'un pulse émis en  $t = 0$  par un pulsar situé à une distance  $D$ . Exprimer ce temps sous la forme d'une intégrale sur la position  $z$ , puis, en faisant toute approximation qui s'impose, montrer que  $\Delta t$  dépend de la fréquence  $\nu$  et se met sous la forme

$$\Delta t(\nu) = \frac{D}{c} + \frac{A_t}{\nu^2} \int_0^D n_e dz \quad (2)$$

où l'intégrale de  $n_e$  le long de la ligne de visée, qu'on notera  $\mathcal{D}_0$ , est appelée *mesure de dispersion*. On précisera l'expression de la constante  $A_t$  en fonction de constantes fondamentales et on donnera sa valeur.

**La réponse à la question Q11 nécessite d'y consacrer un temps suffisant, et sera valorisée en conséquence, en évaluant non seulement le résultat mais aussi la démarche proposée.**

**Q11.** La Fig. 3 représente un diagramme temps-fréquence pour le pulsar J1800+5034, observé avec le Green Bank Telescope. À partir de ce diagramme et de la relation (2) obtenue à la question précédente, estimer la mesure de dispersion en direction de ce pulsar. On l'exprimera en  $\text{pc.cm}^{-3}$ , qui est l'unité habituellement utilisée par les astrophysiciens. En déduire une estimation grossière de la distance  $D$  du pulsar, et la comparer à celles de la littérature (entre 1,4 kpc et 1,9 kpc, selon R. S. Lynch *et al.*, *The Astrophysical Journal*, 859, 93, 2018 [<https://arxiv.org/abs/1805.04951>]).

## B. Mesure de rotation

On considère maintenant que le plasma interstellaire de la Fig. 1 est magnétisé, et on décompose le champ magnétique  $\vec{B}$  qui y règne, à ne pas confondre avec le champ magnétique  $\vec{\mathcal{B}}$  de l'onde, en une composante  $\vec{B}_\perp$  perpendiculaire à la ligne de visée, c'est-à-dire à la direction  $\vec{e}_z$  de propagation de l'onde, et une composante  $\vec{B}_\parallel = B_z \vec{e}_z$  qui lui est parallèle. On rappelle par ailleurs qu'une onde électromagnétique polarisée circulairement est dite "gauche" ou "droite" suivant que le vecteur champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  en un point donné de l'espace tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ou inversement, du point de vue de l'observateur. Le sens de rotation est donc celui représenté sur la Fig. 4. Les vecteurs portant ces polarisations circulaires droite ("+") et gauche ("-") peuvent être représentés en notation complexe par

$$\vec{e}_+ = \vec{e}_x + i\vec{e}_y \quad \vec{e}_- = \vec{e}_x - i\vec{e}_y \quad (3)$$

L'émission radio des pulsars, elle, est fortement polarisée linéairement. En supposant qu'au niveau de la source ( $z = 0$ ) cette polarisation est parallèle à  $\vec{e}_x$ , on peut donc y écrire le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  comme

$$\vec{\mathcal{E}}(z = 0, t) = \text{Re} \left[ \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \left( \frac{\vec{e}_+ + \vec{e}_-}{2} \right) \right] \quad (4)$$

ce qui correspond à un angle de polarisation  $\psi = 0$ , tel que défini sur la Fig. 4 (à droite).



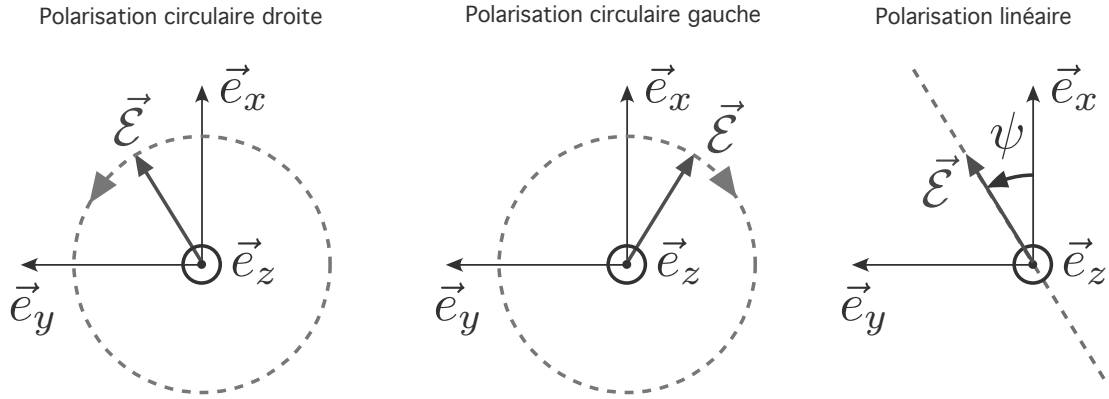


FIGURE 4 – Les figures de gauche et centrale montrent la définition des polarisations circulaires droite et gauche, représentées dans le même système d’axes que la Fig. 1, vues depuis la position de l’observateur. Les cercles en tirets montrent la trajectoire de l’extrémité du vecteur champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  au cours du temps, en un point fixe de l’espace, le sens de parcours étant indiqué par les flèches. La figure de droite donne la définition de l’angle de polarisation  $\psi$  pour une polarisation linéaire, dans le même système d’axes. Les tirets représentent le plan d’oscillation du champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Q12.** En l’absence de champ magnétique  $\vec{B}$ , la relation de dispersion obtenue à la question Q4 donne un nombre d’onde  $k(\omega)$  indépendant de l’état de polarisation circulaire. Écrire le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$  à la position  $z$  sur la ligne de visée, en fonction de  $\mathcal{E}_0$ ,  $\omega$  et  $k(\omega)$ , exprimé sur les vecteurs  $\vec{e}_+$  et  $\vec{e}_-$ . Que peut-on en déduire sur l’angle de polarisation  $\psi(z)$  qui serait observé dans ce cas ?

En réalité, la présence d’un champ magnétique, et plus spécifiquement de sa composante  $\vec{B}_{\parallel}$ , modifie la relation de dispersion, qui dépend alors de l’état de polarisation circulaire de l’onde. On a les expressions suivantes des nombres d’onde, respectivement pour les polarisations circulaires droite ( $k_+$ ) et gauche ( $k_-$ ),

$$k_+^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega - \omega_c} \right) \quad k_-^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - \frac{\omega\omega_p^2}{\omega + \omega_c} \right) \quad (5)$$

où  $\omega_c = eB_z/m_e$  est la *pulsation cyclotron*.

**Q13.** Écrire alors le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$  à la position  $z$ , en fonction de  $\mathcal{E}_0$ ,  $k_+(\omega)$ ,  $k_-(\omega)$  et  $\omega$ . On exprimera le résultat sur la base des vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

La réponse à la question Q14 nécessite d’y consacrer un temps suffisant, et sera valorisée en conséquence, en évaluant non seulement le résultat mais aussi la démarche proposée.

**Q14.** En supposant que la pulsation  $\omega$  est suffisamment élevée (on précisera les approximations que cela recouvre, dont l'une est déjà connue), montrer qu'on peut écrire  $k_+ = k - \Delta k$  et  $k_- = k + \Delta k$ , où  $k$  est le nombre d'onde en l'absence de champ magnétique. On explicitera  $\Delta k$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_c$  et  $c$ . En déduire que la propagation dans le plasma fait tourner la direction de polarisation de l'onde, et que l'angle de polarisation mesuré par l'observateur a pour expression approchée

$$\psi(D) = \frac{e^3 n_e B_z D}{2\omega^2 c \epsilon_0 m_e^2}. \quad (6)$$

Généraliser cette expression au cas d'un milieu non uniforme, où  $n_e$  et  $B_z$  peuvent dépendre de  $z$ . On mettra le résultat sous la forme  $\psi(D) = \mathcal{F}_0 \lambda^2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde, en précisant l'expression de la mesure de rotation  $\mathcal{F}_0$ .

**Q15.** À partir de ce qui précède, proposer une méthode (très) approximative d'estimation du champ magnétique moyen le long de la ligne de visée  $\langle B_z \rangle$ , en fonction de la mesure de rotation  $\mathcal{F}_0$  et de la mesure de dispersion  $\mathcal{D}_0$ . Que peut-on déduire du signe de la mesure de rotation ?

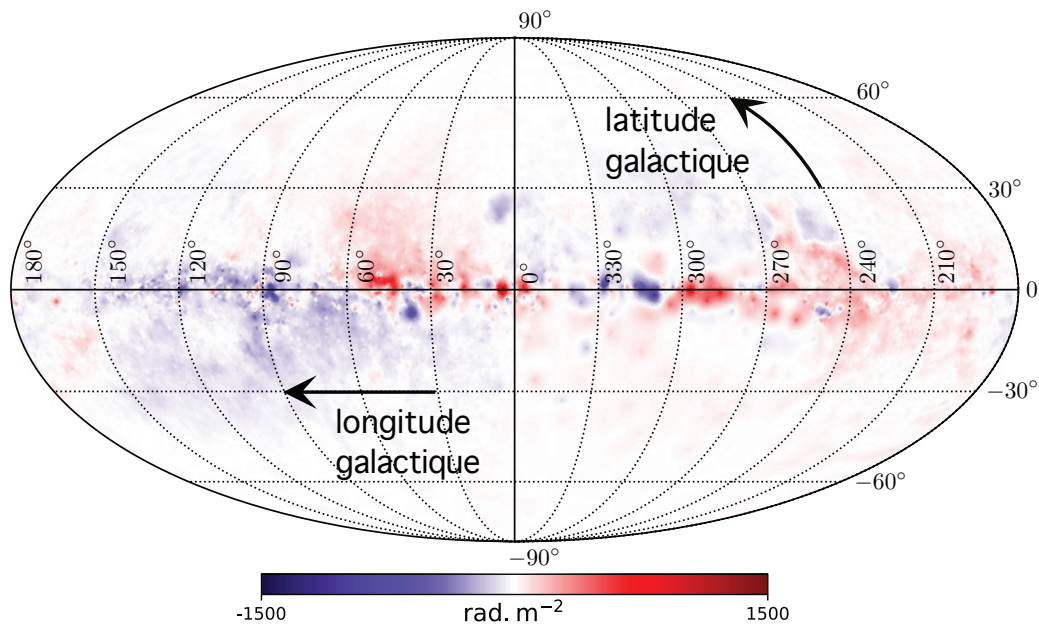


FIGURE 5 – Carte de mesures de rotation sur l'ensemble du ciel, représenté en utilisant une projection de Mollweide. Le plan galactique correspond à la latitude galactique  $b = 0^\circ$ , et la direction parallèlement à ce plan est repérée par la longitude galactique  $\ell$ . Figure adaptée de N. Oppermann *et al.*, *Astronomy & Astrophysics*, 542, 93, 2012, [<https://arxiv.org/abs/1111.6186>]

La Fig. 5 représente une carte du ciel entier, créée à partir de mesures de rotation effectuées sur des sources extragalactiques. Elle utilise une projection de Mollweide dans laquelle le plan galactique correspond à la latitude galactique  $b = 0^\circ$ , et les différents "méridiens" correspondent aux longitudes galactiques  $\ell$ .

**Q16.** Pourquoi, selon vous, observe-t-on des mesures de rotation plus grandes en valeur absolue au voisinage du plan galactique qu'à hautes latitudes? En prenant comme valeur typique des mesures de rotation dans le plan galactique  $|\mathcal{F}_0| = 1000 \text{ rad.m}^{-2}$ , estimer l'intensité du champ magnétique galactique.

## II. Poussières interstellaires et champ magnétique

Dans cette partie du problème, on aborde le lien entre les grains de poussière interstellaire, agrégats d'atomes de taille typiquement sub-micrométrique, le champ magnétique, et la polarisation de la lumière, observée dès 1949 par J. S. Hall et W. A. Hiltner. On verra ainsi comment l'extinction différentielle de la lumière d'étoiles d'arrière-plan par des grains de poussière non-sphériques provoque l'apparition d'une polarisation linéaire (sous-partie A), et par quel mécanisme on peut expliquer l'alignement statistique des grains dans le champ magnétique, résultant en un effet net de polarisation (sous-partie B).

### A. Polarisation de la lumière par un grain interstellaire

On considère la situation représentée sur la Fig. 6, où la lumière d'une étoile d'arrière-plan traverse un nuage contenant des grains de poussière non-sphériques, avant d'être captée par un observateur. L'interaction de la lumière avec la matière est modélisée par une équation - appelée *équation du transfert de rayonnement* - qui gouverne l'évolution de l'intensité  $\mathcal{I}$  du rayonnement avec la position  $z$  sur la ligne de visée, selon

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = \varepsilon - \kappa\mathcal{I} \quad (7)$$

où  $\varepsilon$  est l'émissivité et  $\kappa$  le coefficient d'extinction, qu'on supposera tous deux uniformes dans le nuage. Dans le domaine visible qui nous intéresse ici, l'émissivité des poussières est négligeable, et on prendra donc  $\varepsilon = 0$ . Le coefficient d'extinction est quant à lui relié à la section efficace d'extinction  $\Sigma$  via la densité numérique des poussières  $n_d$ , avec  $\kappa = n_d\Sigma$ .

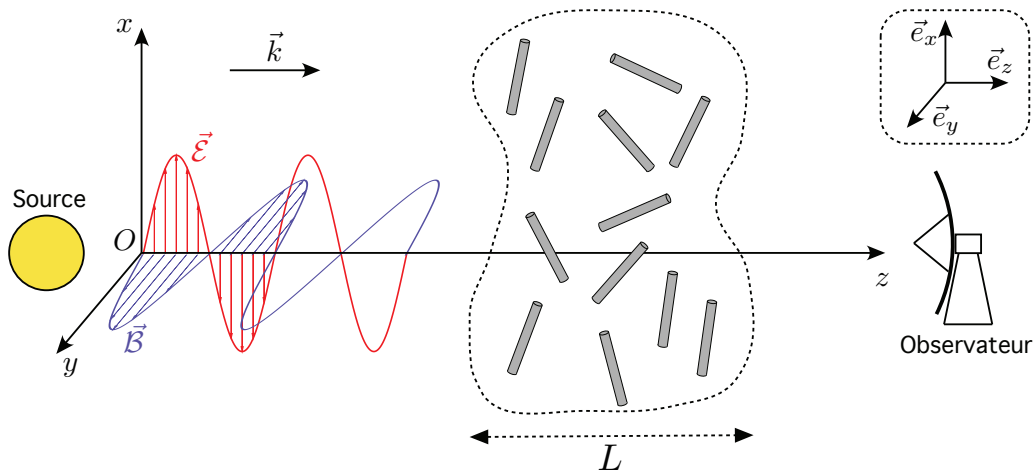


FIGURE 6 – Traversée d'un nuage contenant des poussières interstellaires par la lumière d'une étoile d'arrière-plan. Ces grains de poussières sont modélisés par les bâtonnets gris.

**Q17.** Dans un premier temps, on suppose les grains sphériques. Dans ce cas, le problème est indépendant de l'orientation du champ électrique incident. Écrire la solution  $\mathcal{I}(z)$  de l'équation du transfert lorsque le rayonnement incident a pour intensité  $\mathcal{I}_0$ . Exprimer l'intensité  $\mathcal{I}(L)$  en sortie du nuage de poussières ; on introduira la *profondeur optique*  $\tau = \kappa L$ , où l'on rappelle que  $L$  est la profondeur du nuage. Le rayonnement sortant du nuage n'est alors pas polarisé.

Pour le reste de cette partie II, on tient désormais compte de la structure non-sphérique des grains de poussière, et pour simplifier, chaque grain est assimilé à un cylindre de base circulaire (rayon  $a$ ) et de hauteur  $h$ , avec  $h \gg a$  et  $h \gg \lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde du rayonnement.

On suppose tout d'abord que les grains sont immobiles et alignés perpendiculairement à la direction d'observation. C'est le modèle *picket fence* (terme anglais signifiant "clôture") présenté sur le panneau de gauche de la Fig. 7. Il convient alors de considérer deux sections efficaces d'extinction différentes selon que le train d'onde électromagnétique incident présente un champ électrique le long de l'axe du cylindre ( $\Sigma_{\parallel}$ ) ou perpendiculaire à celui-ci ( $\Sigma_{\perp}$ ). On définit par ailleurs l'*efficacité d'extinction*  $Q$  comme la section efficace rapportée à la surface du grain projetée sur le plan du ciel ( $xOy$ ).

**Q18.** Exprimer les efficacités d'extinction  $Q_{\parallel}$  et  $Q_{\perp}$  en fonction de  $\Sigma_{\parallel}$ ,  $\Sigma_{\perp}$ ,  $a$  et  $h$ .

Ces deux efficacités d'extinction, ainsi que leur différence  $\Delta Q = Q_{\parallel} - Q_{\perp}$ , sont représentées en fonction du paramètre de taille  $x = 2\pi a/\lambda$  sur le panneau de gauche de la Fig. 8.

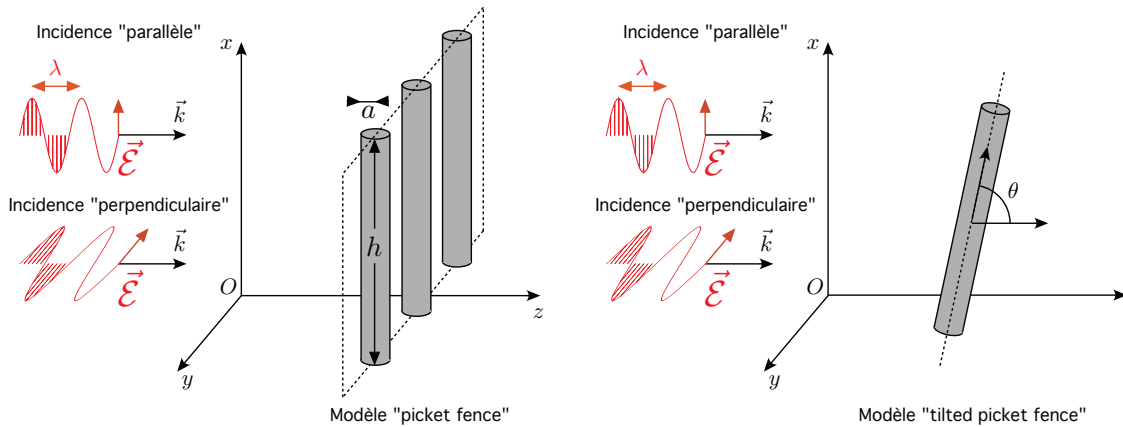


FIGURE 7 – Dans le modèle *picket fence* (à gauche), les grains de poussière sont immobiles et alignés perpendiculairement à la direction d'observation. Leur section efficace d'extinction dépend de la composante (parallèle ou perpendiculaire à l'axe des cylindres) du rayonnement incident. Dans le modèle *tilted picket fence* (à droite), les grains sont toujours immobiles mais leur axe est incliné d'un angle  $\theta$  sur la ligne de visée. Le modèle *picket fence* en est un cas particulier pour  $\theta = \pi/2$ . Par souci de lisibilité, un seul grain est représenté sur le schéma de droite.

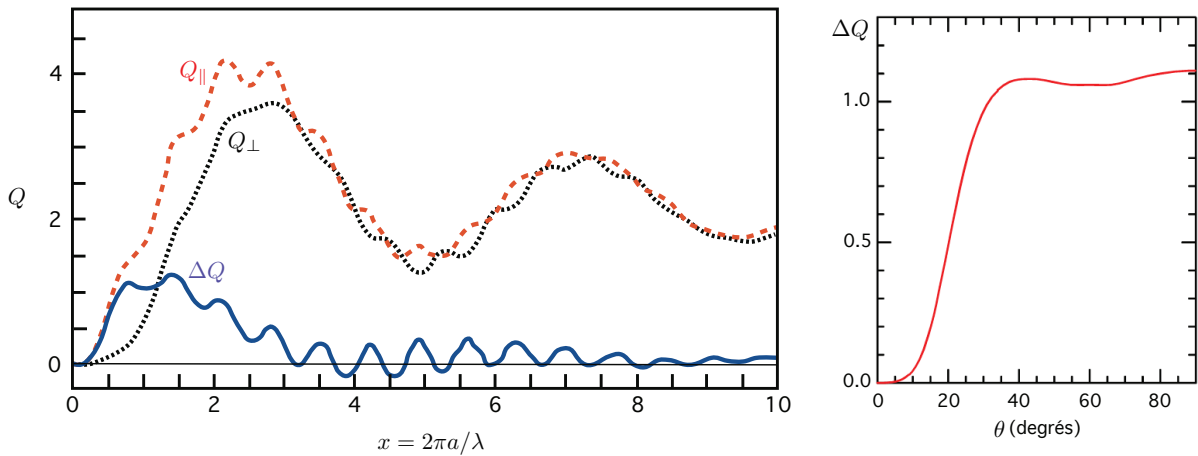


FIGURE 8 – Sur le panneau de gauche, on présente les efficacités d'extinction  $Q_{\parallel}$  (tirets),  $Q_{\perp}$  (pointillés) et leur différence  $\Delta Q = Q_{\parallel} - Q_{\perp}$  (trait plein), en fonction du paramètre de taille  $x = 2\pi a/\lambda$ , dans le modèle *picket fence* ( $\theta = \pi/2$ ). Sur le panneau de droite, on présente l'efficacité différentielle  $\Delta Q$  dans le modèle *tilted picket fence*, pour un paramètre de taille fixé à  $x = 1,2$  et en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ . Ces deux figures sont adaptées de l'ouvrage "The Physics of Interstellar Dust" (E. Krügel, IoP Publishing, 2003).

**Q19.** Chacune des composantes (parallèle et perpendiculaire à l'axe du cylindre) du rayonnement émis par l'étoile ayant une intensité égale,  $\mathcal{I}_{\parallel}(0) = \mathcal{I}_{\perp}(0) = \mathcal{I}_0/2$ , l'intensité polarisée  $\mathcal{P} = \mathcal{I}_{\perp} - \mathcal{I}_{\parallel}$  est nulle en  $z = 0$ . Exprimer l'intensité de chacune de ces composantes en sortie du nuage ( $z = L$ ), en introduisant les profondeurs optiques  $\tau_{\parallel}$  et  $\tau_{\perp}$  idoines, qu'on explicitera en fonction de  $n_d$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $L$  et des efficacités  $Q_{\parallel}$  et  $Q_{\perp}$ .

**Q20.** En se plaçant à un paramètre de taille  $x = 1$ , identifier la profondeur optique maximale  $\tau_{\max}$  et celle minimale  $\tau_{\min}$  parmi le couple  $(\tau_{\parallel}, \tau_{\perp})$ . Quelle est l'orientation de la polarisation linéaire observée ?

**Q21.** La fraction de polarisation linéaire  $p$  est le rapport de l'intensité polarisée  $\mathcal{P}$  à l'intensité totale  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\perp} + \mathcal{I}_{\parallel}$ . Déterminer sa valeur en sortie du nuage en fonction de  $\tau_{\max}$  et  $\tau_{\min}$ , et en donner une approximation en fonction de  $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$  si l'on suppose l'extinction faible, c'est-à-dire pour  $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} \ll 1$ .

On considère maintenant un modèle légèrement plus complexe, dit *tilted picket fence*, représenté sur le panneau de droite de la Fig. 7, où le plan contenant les grains de poussières est incliné d'un angle  $\theta$  sur la ligne de visée. Par symétrie, on peut se limiter à  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Le panneau de droite de la Fig. 8 montre l'efficacité différentielle  $\Delta Q$  en fonction de cet angle d'incidence, pour un paramètre de taille  $x = 1,2$ .

**Q22.** Expliquer pourquoi  $\Delta Q$  s'annule lorsque  $\theta$  tend vers zéro.

Enfin, on considère un modèle tenant compte du fait que les grains de poussière sont en rotation autour d'un axe perpendiculaire à leur axe de symétrie, ce qu'on expliquera à la Q29. On note  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation des grains de poussières sur eux-mêmes. Pour simplifier, on ne traitera cependant pas un cas général, mais deux cas particuliers représentés sur la Fig. 9, pour lesquels cette rotation a lieu soit dans le plan du ciel (cas 1), soit dans un plan perpendiculaire (cas 2). Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  est alors respectivement porté par  $\vec{e}_z$  et par  $\vec{e}_y$ , et la position de l'axe de symétrie du grain dans ce plan de rotation est repérée par un angle  $\phi(t) = \Omega t$ . On supposera également que les rotations des différents grains sont en phase. Enfin, la vitesse angulaire de rotation étant très inférieure à la pulsation du rayonnement,  $\Omega \ll \omega$ , il est possible, pour ce qui est du transfert de rayonnement, de considérer les grains comme "immobiles à chaque instant".

**Q23.** Dans ces deux cas, la configuration géométrique "instantanée" peut être vue comme une réalisation du modèle *tilted picket fence* pour un certain angle d'incidence  $\theta(t)$ . Quelle est, pour chacun de ces cas, la valeur de cet angle  $\theta(t)$  en fonction de  $\phi(t)$  ?

Les réponses aux questions Q24 à Q26 nécessitent d'y consacrer un temps suffisant, et seront valorisées en conséquence, en évaluant non seulement les résultats mais aussi la démarche proposée.

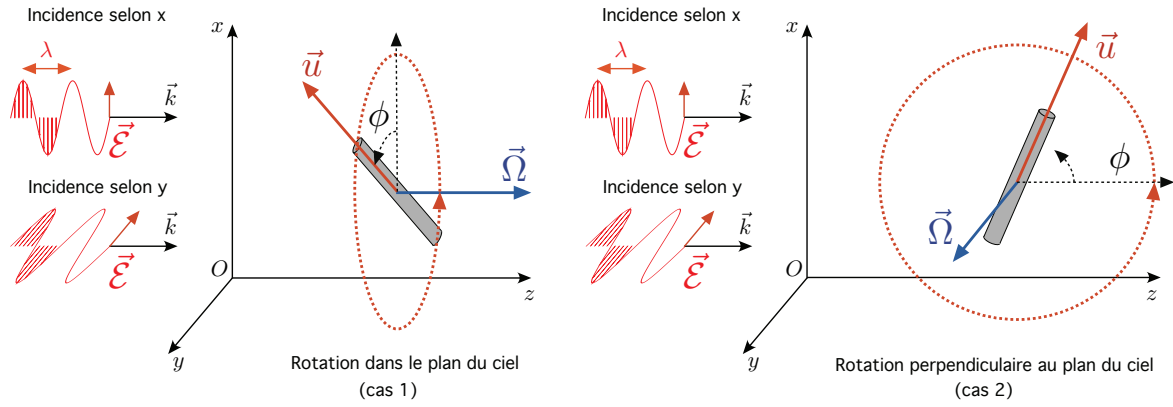


FIGURE 9 – Sur le panneau de gauche, on présente le modèle (cas 1) pour lequel la rotation des grains de poussière a lieu dans le plan du ciel ( $xOy$ ), et sur le panneau de droite, le modèle (cas 2) pour lequel cette rotation a lieu perpendiculairement à ce plan. Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  est respectivement porté par  $\vec{e}_z$  et par  $\vec{e}_y$ . Le vecteur unitaire repérant l'axe du grain est noté  $\vec{u}$  et fait un angle  $\phi(t) = \Omega t$  avec  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ , respectivement.

**Q24.** En se plaçant dans le cas 1, exprimer les intensités  $I_x[\phi(t)]$  et  $I_y[\phi(t)]$  qui seraient observées par des détecteurs sensibles respectivement au champ électrique selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . On donnera le résultat en fonction de  $I_0$ ,  $\tau_{\parallel}$ ,  $\tau_{\perp}$  et  $\phi$ . Quelle est alors la fraction de polarisation  $p$  observée en moyenne? Celle-ci est définie comme

$$p = \frac{\langle I_y[\phi(t)] - I_x[\phi(t)] \rangle}{I_0} = \frac{1}{T I_0} \int_0^T \{I_y[\phi(t)] - I_x[\phi(t)]\} dt \quad (8)$$

où  $T = 2\pi/\Omega$  est la période de rotation des grains.

**Q25.** En se plaçant maintenant dans le cas 2, et en supposant que les profondeurs optiques mises en jeu sont faibles, montrer que la fraction de polarisation observée en moyenne s'écrit

$$p = \frac{2n_d a h L}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta Q(\theta) d\theta = n_d a h L \langle \Delta Q \rangle \quad (9)$$

où  $\Delta Q(\theta)$  est l'efficacité d'extinction différentielle représentée (pour  $x = 1,2$ ) sur le panneau de droite de la Fig. 8, et  $\langle \Delta Q \rangle$  est sa valeur moyenne sur l'ensemble des angles d'incidence  $\theta$ . Dédurre des résultats de ces deux dernières questions la condition géométrique sur  $\vec{\Omega}$  pour observer un effet net de polarisation.



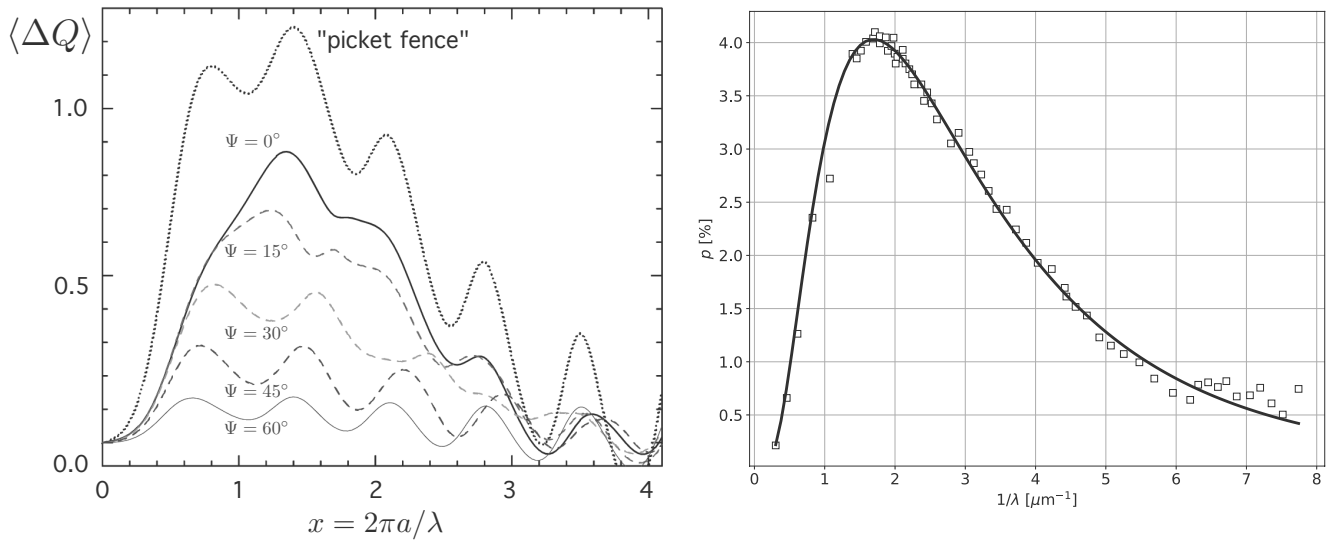


FIGURE 10 – Le panneau de gauche montre l'efficacité différentielle moyenne  $\langle \Delta Q \rangle$  en fonction du paramètre de taille  $x$ , pour différentes valeurs de l'angle  $\Psi$  caractérisant l'inclinaison du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  sur le plan du ciel. Le cas du modèle *picket fence* est également représenté, en pointillés. Figure adaptée de "The Physics of Interstellar Dust" (E. Krügel, IoP Publishing, 2003). Le panneau de droite montre la fraction de polarisation mesurée à différentes longueurs d'onde (carrés blancs) en direction de l'étoile HD161056 par Somerville *et al.* (*The Astrophysical Journal*, 427, 47, 1994 [<http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1994ApJ...427L..47S>]). La courbe en trait plein est un ajustement par la loi empirique de Serkowski.

La Fig. 10 (panneau de gauche) représente  $\langle \Delta Q \rangle$  en fonction du paramètre de taille  $x$ , pour différentes valeurs de l'angle  $\Psi$  caractérisant l'inclinaison du vecteur rotation sur le plan du ciel. Sur la Fig. 9, on a donc  $\Psi = \pi/2$  pour le cas 1 et  $\Psi = 0$  pour le cas 2. Le panneau de droite de la même Fig. 10 représente quant à lui la fraction de polarisation  $p(\lambda)$  du rayonnement observé à différentes longueurs d'onde en direction de l'étoile HD161056. Ces données sont ajustées par une loi empirique, dite de Serkowski.

**Q26.** À partir des données de la Fig. 10, proposer une estimation de la taille caractéristique  $a$  des poussières interstellaires sur la ligne de visée en direction de cette étoile.

## B. Alignement des grains interstellaires dans un champ magnétique

Si les grains de poussières étaient orientés de manière aléatoire, la lumière en sortie du nuage ne serait pas polarisée. Pour expliquer l'effet net de polarisation linéaire observé, il est nécessaire que les grains soient préférentiellement alignés le long d'une direction particulière. C'est là qu'intervient le champ magnétique, en interaction avec le caractère paramagnétique des grains, dont certains sont constitués de silicates comme l'olivine  $\text{Mg}_{2-x}\text{Fe}_x\text{SiO}_4$  (avec  $x \sim 1$ ). Pour étudier le mécanisme de cet alignement, on considère, comme sur la Fig. 11 (panneau de gauche), un grain cylindrique de hauteur  $h$  et à base circulaire de rayon  $a \ll h$ . On note  $C\alpha\beta\gamma$  un système d'axes attaché au grain, avec  $C$  le centre de masse et  $C\gamma$  l'axe de symétrie du cylindre. On suppose que  $C$  est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du nuage, supposé galiléen. On note  $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$  les moments d'inertie par rapport à ces axes, qui constituent les éléments diagonaux, seuls non nuls, de la matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  reliant le moment cinétique  $\vec{\mathcal{L}}$  au vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  par

$$\vec{\mathcal{L}} = \mathbf{I}\vec{\Omega}. \quad (10)$$

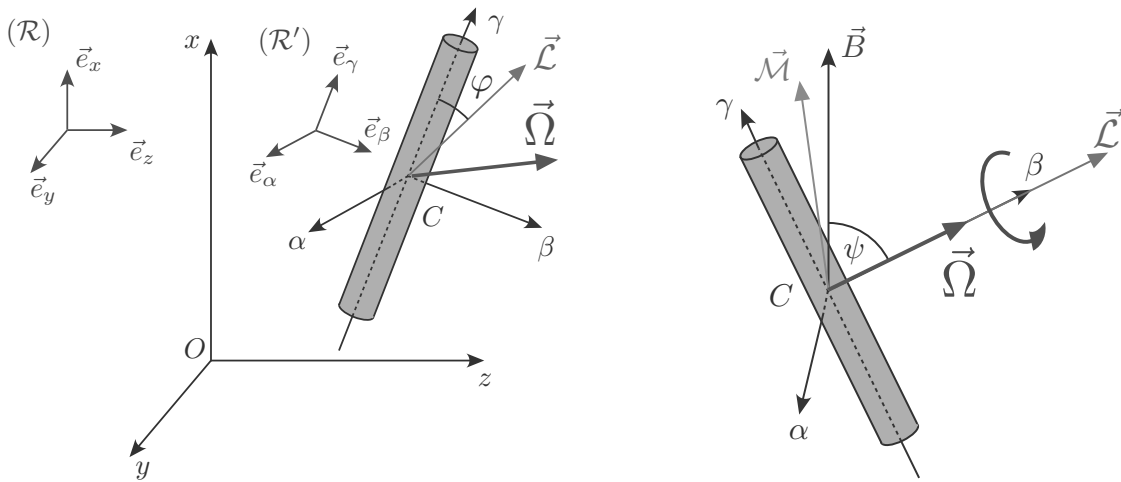


FIGURE 11 – Sur le panneau de gauche, traitant de la situation décrite aux questions **Q27** à **Q29**, on présente le référentiel  $\mathcal{R}'$  attaché au grain et muni d'un repère  $C\alpha\beta\gamma$ , avec  $C$  le centre de masse et  $C\gamma$  l'axe de symétrie du cylindre. Le moment cinétique  $\vec{\mathcal{L}}$  fait un angle  $\varphi$  avec cet axe. Le vecteur instantané de rotation du grain dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen est noté  $\vec{\Omega}$ . Sur le panneau de droite, correspondant à la situation décrite après la question **Q29**, le moment cinétique et le vecteur rotation sont désormais alignés, perpendiculairement à l'axe du cylindre, et font un angle  $\psi$  avec le champ magnétique  $\vec{B}$ . Le vecteur  $\vec{M}$  représente le moment magnétique du grain.

Vue la définition des axes, on a bien entendu  $I_\gamma \ll I_\alpha = I_\beta$ . De manière générale, les équations qui gouvernent l'évolution du vecteur rotation dans le référentiel du grain sont les équations d'Euler

$$\tau_\alpha = I_\alpha \frac{d\Omega_\alpha}{dt} - \Omega_\beta \Omega_\gamma (I_\beta - I_\gamma) \quad \tau_\beta = I_\beta \frac{d\Omega_\beta}{dt} - \Omega_\gamma \Omega_\alpha (I_\gamma - I_\alpha) \quad \tau_\gamma = I_\gamma \frac{d\Omega_\gamma}{dt} - \Omega_\alpha \Omega_\beta (I_\alpha - I_\beta)$$

où  $\vec{\tau}$  est le couple exercé sur le grain dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Physiquement, la mise en rotation du grain se fait notamment par le biais des collisions aléatoires avec des atomes du gaz. À l'équilibre, il y a équipartition entre les énergies cinétiques correspondant aux différents degrés de liberté de rotation.

**Q27.** Expliquer qualitativement pourquoi la lumière en sortie du nuage ne serait pas polarisée si les grains de poussières étaient orientés de manière aléatoire.

**Q28.** Montrer qu'en l'absence de couple,  $\Omega_\gamma$  est constante et que les deux autres composantes du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  peuvent, en choisissant judicieusement l'origine des temps  $t = 0$ , se mettre sous la forme

$$\Omega_\alpha = A \sin(\Omega_p t) \quad \Omega_\beta = A \cos(\Omega_p t) \quad (11)$$

en exprimant la vitesse angulaire de précession  $\Omega_p$  de  $\vec{\Omega}$  autour de  $C\gamma$  en fonction de  $\Omega_\gamma$ ,  $I_\alpha$  et  $I_\gamma$ .

Cette précession provoque des contraintes internes au grain, variables dans le temps, et donc de la dissipation. Si le moment cinétique reste constant, et donc également son module au carré  $\mathcal{L}^2$ , l'effet de cette dissipation interne est de réduire l'énergie cinétique de rotation  $E_{\text{rot}}$ .

**Q29.** Montrer que, quel que soit le couple  $\vec{\tau}$ , cette énergie de rotation peut se mettre sous la forme

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I_\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{I_\alpha}{I_\gamma} - 1 \right) \cos^2 \varphi \right] \quad (12)$$

où l'angle  $\varphi$  est celui indiqué sur le panneau de gauche de la Fig. 11. Justifier alors que le processus de dissipation interne amène la rotation du grain à se produire autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre. Dans la suite on supposera donc que le vecteur rotation et le moment d'inertie sont alignés sur un tel axe, comme représenté sur le panneau de droite de la Fig. 11.

En présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , un grain de poussière paramagnétique de volume  $V$  acquiert un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ , qui est en régime statique relié au champ  $\vec{B}$  via la susceptibilité magnétique  $\chi_1$  par  $\vec{\mathcal{M}} = V\chi_1\vec{B}$ . Dans le référentiel du grain, le champ magnétique n'est cependant pas statique, mais il décrit un cône autour de l'axe de rotation  $C\beta$  à la vitesse angulaire  $\Omega$  (voir le panneau de droite de la Fig. 11). La réponse  $\vec{\mathcal{M}}$  du matériau à ces variations du champ magnétique présente alors un léger retard, ce qu'on modélise par l'introduction d'un second paramètre de susceptibilité  $\chi_2$ . Les deux paramètres dépendent de la vitesse de rotation  $\Omega$ , avec  $0 \leq \chi_2(\Omega) \ll \chi_1(\Omega)$  et  $\chi_2(\Omega = 0) = 0$ . Le moment magnétique est alors donné par

$$\vec{\mathcal{M}} = V \left[ \chi_1(\Omega)\vec{B} + \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right]. \quad (13)$$

**Q30.** Le champ  $\vec{B}$  exerce sur le moment magnétique un couple  $\vec{\tau} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ . Quelle conséquence ce couple a-t-il sur le moment cinétique  $\vec{L}$  vis-à-vis du champ magnétique  $\vec{B}$ ? On pourra justifier le raisonnement à l'aide d'un schéma indiquant l'évolution du vecteur rotation sous l'effet de ce couple.

Les réponses aux questions **Q31** et **Q32** nécessitent d'y consacrer un temps suffisant, et seront valorisées en conséquence, en évaluant non seulement les résultats mais aussi la démarche proposée.

**Q31.** La variation d'énergie cinétique de rotation du grain est donnée par

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\Omega}. \quad (14)$$

Exprimer cette variation d'énergie cinétique en fonction de  $V$ ,  $\chi_2$ ,  $\Omega$  et du produit vectoriel  $\vec{\Omega} \wedge \vec{B}$ . Justifier alors qu'à l'équilibre, le grain est aligné dans le champ magnétique.

**Q32.** D'après les résultats de l'ensemble de cette partie, expliquer pourquoi on peut obtenir l'orientation de la composante du champ magnétique dans le plan du ciel à partir de la direction de polarisation observée dans le visible en direction d'une étoile, sachant que le rayonnement des étoiles n'est pas naturellement polarisé. Les données de la Fig. 12 montrent ainsi que le champ magnétique galactique est dans l'ensemble parallèle au plan galactique.

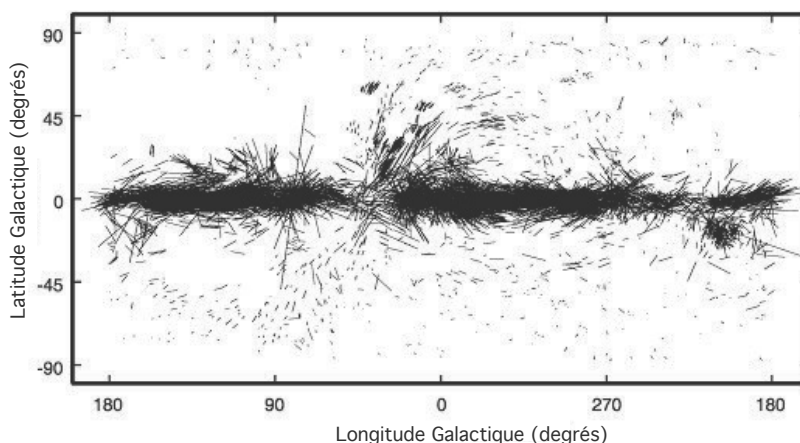


FIGURE 12 – Données de polarisation stellaire sur l'ensemble du ciel. L'orientation des segments correspond à la direction de polarisation linéaire observée en direction de chaque étoile et la longueur de chaque segment est proportionnelle à la fraction de polarisation  $p$ . Figure adaptée de <http://bgandersson.net/grain-alignment>.

### III. Champ magnétique et dynamique interstellaire

Dans cette partie du problème, on aborde certains aspects du rôle que joue le champ magnétique dans la dynamique du milieu interstellaire et la formation des étoiles. Celles-ci naissent par effondrement gravitationnel de structures denses au sein de nuages moléculaires géants constitués de gaz et de poussières, partiellement ionisés. L'ensemble de ce milieu est agité de mouvements turbulents et baigné par un champ magnétique. Il est nécessaire, pour traiter ce système, de faire appel à la magnétohydrodynamique (MHD), qui décrit la dynamique relativement lente de fluides conducteurs. Dans un premier temps (sous-partie **A**), on établira quelques résultats permettant de comprendre la dynamique du gaz interstellaire en présence d'un champ magnétique, puis dans un second temps (sous-partie **B**), on appliquera ces résultats à la question de l'effondrement gravitationnel d'un nuage permettant la formation d'une étoile.

#### A. Pression et tension magnétiques

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$ , dont les seuls constituants sont des particules de masse  $m$  et de charge  $q$ . On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de l'observateur, supposé galiléen. On note  $\vec{v}$  la vitesse d'un élément mésoscopique du fluide dans ce référentiel, et  $n$  sa densité particulaire (nombre de particules par unité de volume). Cet élément de fluide est potentiellement soumis à un champ de gravité dont l'accélération locale est notée  $\vec{g}$ . On note par ailleurs  $P$  la pression cinétique locale et on regroupe toute autre force par unité de volume qui s'applique localement, une fois tenu compte de la gravité et des forces de pression, sous la notation  $\vec{f}$ . Les annexes rappellent les équations de la dynamique des fluides avec ces notations. On fait l'hypothèse que les mouvements du fluide sont non-relativistes, de sorte que  $\beta = v/c \ll 1$  et  $\gamma \approx 1$ . Pour chaque élément de fluide, on peut à chaque instant introduire un *référentiel propre*  $\mathcal{R}'$ , en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , de sorte que cet élément de fluide est immobile dans  $\mathcal{R}'$  à cet instant. Le mouvement d'un fluide chargé implique l'existence de courants, dont la densité volumique dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est notée  $\vec{j} = nq\vec{v}$ .

**Q33.** Dans le référentiel propre de l'élément de fluide, les champs électrique et magnétique sont respectivement  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$ , et ils se transforment en  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le référentiel de l'observateur selon les lois de transformation des champs données en annexe. La loi d'Ohm locale dans le référentiel propre du fluide s'écrivant  $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique, justifier que dans la limite  $\sigma \rightarrow \infty$ , on a

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (15)$$

et en déduire l'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (16)$$

**Q34.** En introduisant une échelle caractéristique  $\ell_0$  et un temps caractéristique  $t_0$  de l'écoulement, montrer par un argument d'ordre de grandeur que dans l'équation de Maxwell-Ampère le terme de courant de déplacement peut être négligé devant  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$ , et en déduire une expression simple de la densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

**Q35.** Dans le système considéré, la force par unité de volume  $\vec{f}$  se résume à la composante magnétique de la force de Lorentz. Montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (17)$$

**Q36.** En rapprochant l'équation (17) de l'équation d'Euler donnée en annexe, expliquer pourquoi on nomme *pression magnétique* la quantité

$$P_m = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (18)$$

Dans le cadre des hypothèses faites ici, on peut appliquer le *théorème du "flux gelé"*, qui s'énonce comme suit. Étant donnée une surface  $S$  attachée au fluide et traversée par un flux magnétique  $\Phi$ , soit

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (19)$$

on montre que ce flux est constant au cours du temps lorsqu'on tient compte simultanément des variations temporelles du champ  $\vec{B}$  en un point donné de l'espace et des variations de la surface d'intégration  $S$  du fait des mouvements du fluide. Mathématiquement, on écrit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{\ell}) = 0 \quad (20)$$

où  $C$  est le contour fermé (orienté selon  $d\vec{\ell}$ ) sur lequel s'appuie la surface  $S$ . On ne cherchera pas à démontrer ce théorème, mais on va voir comment l'utiliser pour interpréter le rôle des deux termes de l'expression (17). Pour cela, on considère la situation représentée sur le panneau de gauche de la Fig. 13. Une surface  $S$ , circulaire de rayon  $R$ , est traversée par le champ  $\vec{B}$  supposé uniforme. On la contracte de manière homothétique en une surface également circulaire, de rayon  $R' < R$ , le champ magnétique traversant la surface restant uniforme.

**Q37.** Que vaut l'intensité  $B'$  du champ magnétique dans la situation finale ? Supposant les autres forces (pression et gravité) inchangées, comment le système va-t-il répondre à cette contraction ?

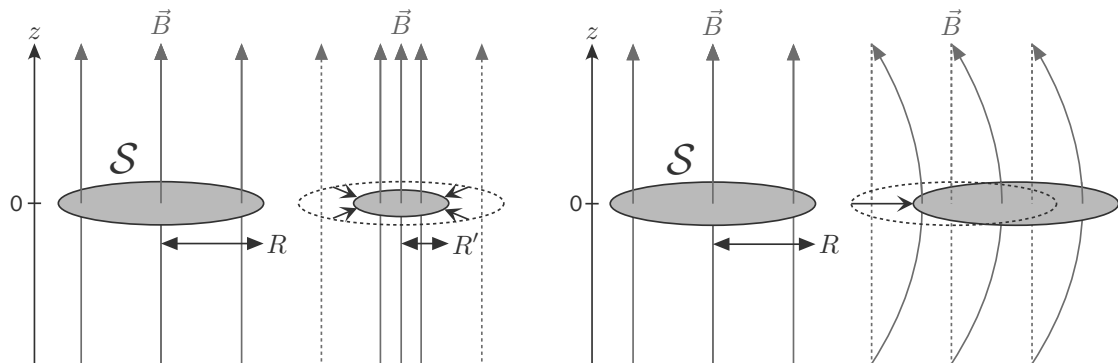


FIGURE 13 – Sur le panneau de gauche, on considère le cas de la contraction homothétique d’une surface circulaire de rayon initial  $R$ , les lignes de champ magnétiques restant parallèles à l’axe  $Oz$ . Sur le panneau de droite, on considère le cas où la surface circulaire n’est pas déformée mais se déplace globalement, les lignes de champ restant fixées à grande distance sur l’axe  $Oz$ .

Pour comprendre la signification physique du second terme du membre de droite de l’équation (17), on considère la situation représentée sur le panneau de droite de la Fig. 13. La surface circulaire de rayon  $R$  n’est cette fois pas déformée mais déplacée légèrement vers la droite, de sorte que le champ magnétique, d’intensité uniforme et constante, est courbé, les lignes de champ restant fixées à grande distance.

**Q38.** En notant  $\vec{u}$  le vecteur unitaire le long d’une ligne de champ, de sorte que  $\vec{B} = B\vec{u}$ , montrer qu’au niveau de la surface  $\mathcal{S}$ , soit pour  $z = 0$ , le second terme du membre de droite de l’équation (17) s’écrit simplement en fonction de  $B$ ,  $\mu_0$  et  $d\vec{u}/dz$ . En déduire comment le système va réagir sous l’effet de ce terme appelé *tension magnétique*.

## B. Effondrement gravitationnel et champ magnétique

Une étoile naît de l’effondrement d’un nuage sous l’effet de son *auto-gravité*, c’est-à-dire de l’interaction gravitationnelle, attractive, entre chacune des particules qui le constituent. Pour que cela se produise, il est nécessaire que cette interaction l’emporte sur l’ensemble des forces qui pourraient s’y opposer. Le *théorème du viriel*, qu’on ne cherchera pas à démontrer, permet justement de discuter de l’équilibre de ce nuage au travers des différentes formes d’énergie mises en jeu :

- L’énergie cinétique  $E_c = E_k + E_r + E_t > 0$  comprenant d’une part l’agitation thermique  $E_k$  et d’autre part les mouvements macroscopiques (rotation  $E_r$  et mouvements turbulents  $E_t$ )
- L’énergie gravitationnelle  $E_g < 0$
- L’énergie magnétique  $E_m > 0$



Avec ces notations, le théorème du viriel exprime qu'à l'équilibre on a

$$2E_c + E_g + E_m = 0. \quad (21)$$

Le nuage se contracte si la somme  $2E_c + E_g + E_m$  devient négative et il se dilate si elle est positive.

Pour simplifier le problème, on considère un nuage sphérique, de rayon initial  $R_0$  et de masse  $M$ , homogène (on note  $\rho_0$  la masse volumique initiale), baigné dans un champ magnétique uniforme parallèle à l'axe  $Oz$ , avec une intensité initiale  $B_0$ . Le nuage est supposé en rotation autour de ce même axe  $Oz$ , avec une vitesse angulaire initiale  $\Omega_0$ . On note  $R$  le rayon courant du nuage en contraction à symétrie sphérique à partir de  $R = R_0$ .

**Q39.** En notant  $m(r)$  la masse interne au rayon  $r$ , écrire l'énergie gravitationnelle  $E_g(R)$  du nuage sous la forme d'une intégrale triple, portant sur l'ensemble de son volume. Calculer cette intégrale pour établir l'expression de  $E_g(R)$  en fonction de  $G$ ,  $M$  et  $R$ .

**Q40.** On suppose la conductivité électrique du fluide infinie, de sorte que l'intensité du champ magnétique augmente lors de la contraction, le flux  $\Phi$  au travers de la section  $S = \pi R^2$  du nuage restant constant. En admettant que l'énergie magnétique s'écrit  $E_m = 2P_m V$ , avec  $V$  le volume du nuage, donner son expression en fonction de  $\Phi$ ,  $\mu_0$  et  $R$ .

**Q41.** On suppose que le champ magnétique fournit l'essentiel du support contre la gravité, c'est-à-dire que  $E_m \gg E_c$ . Montrer que le nuage s'effondre si

$$\frac{M}{\Phi} > \sqrt{\frac{20}{9\pi\mu_0 G}}. \quad (22)$$

La quantité à droite de cette inégalité est nommée rapport masse-flux critique. Inversement, si ce rapport  $M/\Phi$  est suffisamment faible, le nuage est stable.

Le fluide n'est en réalité pas parfaitement conducteur, car il est constitué non seulement d'espèces chargées électriquement mais également, et en fait majoritairement, d'espèces neutres, seules les premières étant attachées aux lignes de champ magnétique. Il peut donc y avoir un découplage entre ces deux espèces, phénomène qu'on nomme *diffusion ambipolaire*.

**Q42.** Quel est l'effet de cette diffusion des particules neutres, constituants très majoritaires du nuage, au travers des lignes de champ magnétique, sur le flux magnétique  $\Phi$  au cours du temps ?

**Q43.** Que peut-on alors prévoir comme conséquence de ce mécanisme sur un nuage initialement stable ?

On considère maintenant la contraction d'un nuage de rayon initial  $R_0$ , constitué uniquement d'espèces neutres, sans champ magnétique mais en rotation solide à la vitesse angulaire initiale  $\Omega_0$ . La rotation reste solide au cours de la contraction, la vitesse angulaire étant notée  $\Omega(t)$ . À titre d'exemple numérique, on considérera le Soleil, né de la contraction d'un *cœur dense* de même masse que le Soleil et de rayon  $R_0 = 10^{-1}$  pc, avec initialement ( $t = 0$ ) un rapport  $E_c/|E_g| = 10^{-2}$ . On suppose la température nulle et qu'il n'y a pas de mouvements turbulents.

**Q44.** Comment s'écrit l'énergie cinétique  $E_c$  en fonction de  $\Omega$  et  $R$ ? On rappelle que le moment d'inertie  $I_s$  d'une sphère homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$  autour d'un axe de symétrie s'écrit

$$I_s = \frac{2}{5}MR^2. \quad (23)$$

**Q45.** Que peut-on dire du moment cinétique  $\vec{L}$  du nuage? En déduire une expression de la vitesse de rotation  $\Omega$  en fonction de  $R$ ,  $R_0$  et  $\Omega_0$ . Comment le rapport  $E_c/|E_g|$  varie-t-il avec  $R$ ?

**Q46.** En considérant numériquement le cas du cœur dense à l'origine du Soleil, déterminer le rayon  $R_{\text{eq}}$  pour lequel on atteint l'équilibre entre gravité et force centrifuge. Expliquer pourquoi on parle de *problème du moment cinétique* dans la théorie de la formation des étoiles.

On va voir que le champ magnétique permet d'apporter une solution à ce problème. On considère donc maintenant le cas d'un cœur dense en rotation solide en présence d'un champ magnétique. L'environnement de ce cœur est une enveloppe plus ténue, de masse volumique  $\rho_{\text{ext}}$ . Pour simplifier, cœur comme enveloppe sont supposés constitués d'espèces ionisées uniquement. On suppose que la contraction du cœur a stoppé à un rayon  $R_{\text{eq}}$  en raison du support rotationnel discuté à la question précédente. À ce stade, pris comme origine des temps ( $t = 0$ ), sa vitesse angulaire est alors  $\Omega_{\text{eq}}$ , alors que l'enveloppe, elle, est statique. On suppose également qu'à cet instant le champ magnétique est uniforme selon l'axe  $Oz$ . La rotation continue du cœur entraîne alors la torsion des lignes de champ, comme l'indique le schéma de la Fig. 14. La propagation de cette déformation le long de l'axe de rotation et donc vers l'enveloppe se fait à la vitesse d'Alfvén, définie par

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}. \quad (24)$$

**Q47.** Expliquer pourquoi ce mécanisme permet de mettre en rotation l'enveloppe, ou plus précisément la zone cylindrique de l'enveloppe délimitée par les traits grisés fins sur la Fig. 14.

On rappelle que le moment d'inertie  $I_c$  d'un cylindre homogène de masse  $M_c$  et de rayon  $R_c$ , par rapport à son axe de symétrie, s'écrit

$$I_c = \frac{1}{2}M_cR_c^2. \quad (25)$$

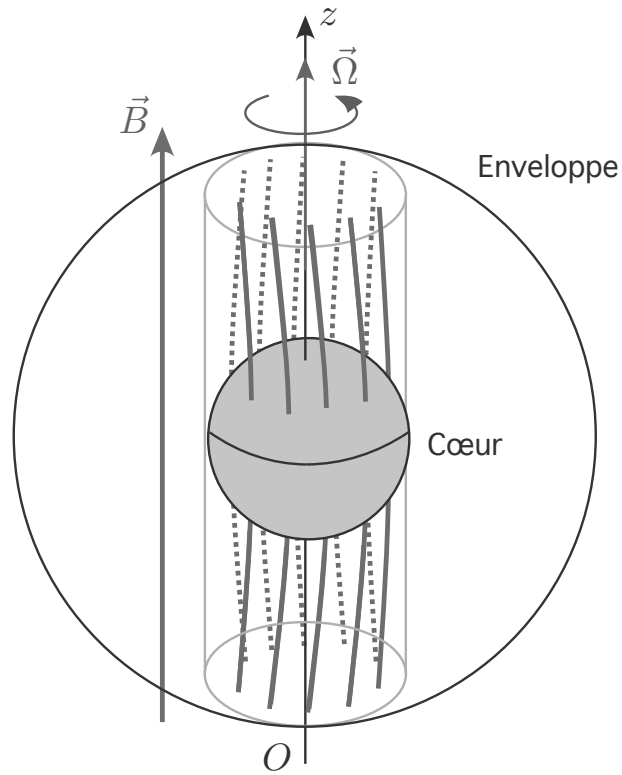


FIGURE 14 – Un cœur dense de masse  $M$  et de rayon  $R$ , en rotation autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Un champ magnétique initialement uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  (courbes rouges) baigne le milieu, qui comprend, outre le cœur dense, une enveloppe de masse volumique  $\rho_{\text{ext}} \ll \rho$ .

**Q48.** Estimer la masse  $M_{\text{ext}}$  d'enveloppe en corotation avec le cœur au bout d'un temps  $t$ , en fonction de  $R_{\text{eq}}$ ,  $v_A$ ,  $\rho_{\text{ext}}$  et du temps  $t$ . Montrer alors que la vitesse angulaire de rotation suit une loi de la forme

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_{\text{eq}}}{1 + \frac{t}{t_B}} \quad (26)$$

où l'on explicitera le temps  $t_B$  de *freinage magnétique* en fonction de  $M$ ,  $R_{\text{eq}}$ ,  $v_A$  et  $\rho_{\text{ext}}$ . Conclure.

\* \*  
\*

# FORMULAIRE

## Constantes fondamentales et valeurs numériques

Grandeur	symbole	valeur	unité
masse de l'électron	$m_e$	$9,1 \times 10^{-31}$	kg
masse du proton	$m_p$	$1,7 \times 10^{-27}$	kg
vitesse de la lumière	$c$	$3,0 \times 10^8$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
charge élémentaire	$e$	$1,6 \times 10^{-19}$	C
masse du soleil	$M_\odot$	$2,0 \times 10^{30}$	kg
unité astronomique	UA	$1,5 \times 10^{11}$	m
parsec	pc	$3,0 \times 10^{16}$	m
rayon du Soleil	$R_\odot$	$7,0 \times 10^8$	m
constante de Planck	$h$	$6,6 \times 10^{-34}$	J·s
constante de Boltzmann	$k_B$	$1,4 \times 10^{-23}$	J·K <sup>-1</sup>
permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0$	$8,8 \times 10^{-12}$	F·m <sup>-1</sup>
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	kg·m·A <sup>-2</sup> ·s <sup>-2</sup> .
constante de gravitation	$G$	$6,7 \times 10^{-11}$	m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ·s <sup>-2</sup>

Quelques approximations utiles pour les applications numériques :

$$\pi^2 \approx 10 \qquad (3,3)^2 \approx 11 \qquad \frac{1}{6,7} \approx 0,15 \qquad 8,8 \times 0,91 \approx 8,0$$

$$\frac{1,6}{\pi} \sqrt{\frac{3}{8,8 \times 0,91}} \approx 0,31 \qquad \frac{(1,6)^2}{3 \times 8^2} \approx 1,3 \times 10^{-2} \qquad \frac{3^3 \times 8,8 \times (9,1)^2}{(1,6)^3} \approx 4,8 \times 10^3$$

## Rappels de relativité restreinte

$\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  étant deux référentiels galiléens munis des systèmes d'axes indiqués sur la Fig. 15, on note  $(ct, x, y, z)$  et  $(ct', x', y', z')$  les coordonnées d'un évènement dans ces deux référentiels respectifs, et  $\vec{V} = V\vec{e}_x$  la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La transformation de Lorentz relie les coordonnées de cet évènement dans les deux référentiels selon

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad (27)$$

où l'on a introduit les deux grandeurs suivantes, omniprésentes en relativité (la seconde,  $\gamma$ , étant appelée *facteur de Lorentz*)

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \qquad (28)$$

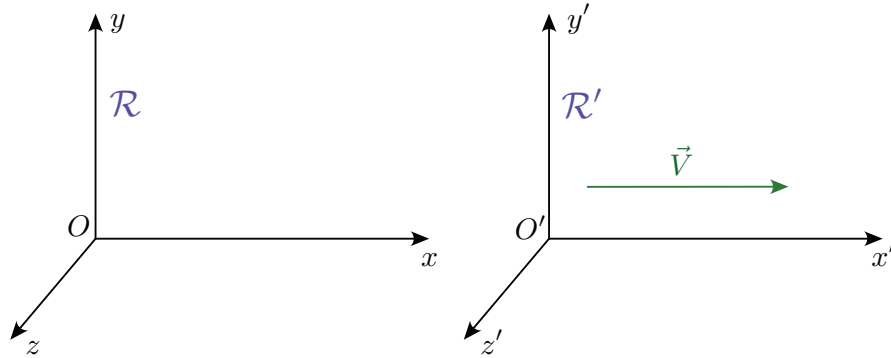


FIGURE 15 – Transformation spéciale de Lorentz. Le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , à la vitesse  $\vec{V} = V\vec{e}_x$ .

### Rappels d'électromagnétisme

Les équations de Maxwell gouvernant le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  s'écrivent sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (29)$$

où  $\rho_e$  est la densité volumique des charges et  $\vec{j}$  la densité volumique de courant. La relation entre la permittivité diélectrique du vide, sa perméabilité magnétique et la vitesse de la lumière s'écrit

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \quad (30)$$

Dans une transformation de Lorentz, avec les notations du changement de référentiel de la Fig. 15, et en notant  $\vec{u} = \vec{V}/V$  le vecteur unitaire de la vitesse  $\vec{V}$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , on a les relations de transformation du champ électromagnétique :

$$\vec{E}' = \gamma \left( \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) - (\gamma - 1) \left( \vec{E} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \quad \vec{B}' = \gamma \left( \vec{B} - \frac{\vec{V} \wedge \vec{E}}{c^2} \right) - (\gamma - 1) \left( \vec{B} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \quad (31)$$

### Rappels de dynamique des fluides

Pour un fluide de masse volumique  $\rho$ , de vitesse  $\vec{v}$ , soumis à un champ de gravité dont l'accélération est  $\vec{g}$ , on note  $P$  la pression cinétique du fluide et  $\vec{f}$  la force par unité de volume qui s'applique localement au fluide, hormis la gravité et les forces de pression. On a alors l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (32)$$

et l'équation d'Euler, qui exprime la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{f}. \quad (33)$$

### Identités vectorielles

Théorème du rotationnel :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (34)$$

Théorème de la divergence :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\tau = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (35)$$

Double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (36)$$

Produit mixte :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{w}) \quad (37)$$

Gradient d'un produit scalaire :

$$\vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \quad (38)$$

Formule du double rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (39)$$