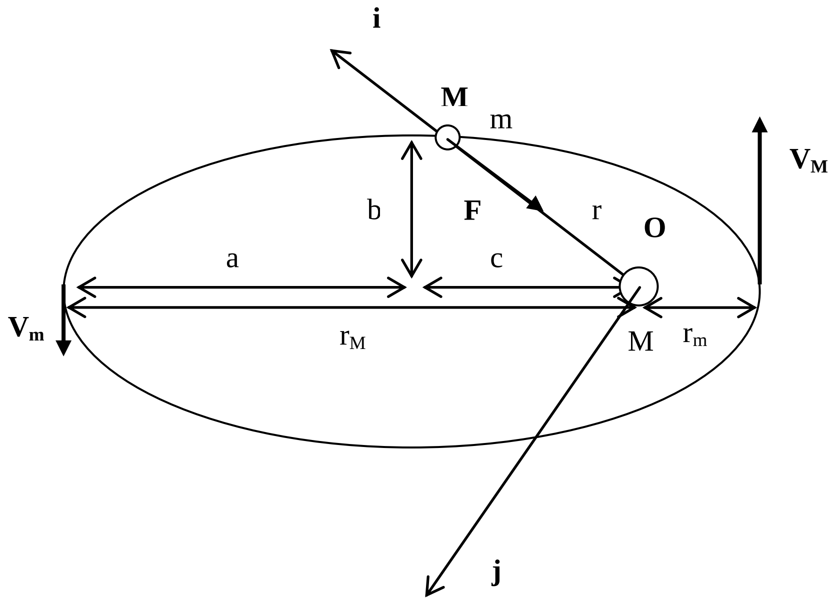
Mouvement elliptique d'un satellite



Notations : Les vecteurs sont notés en gras

$\omega = d\theta/dt$ $\omega' = d\omega/dt$ $r' = dr/dt$ $r'' = d^2r/dt^2$

$\mathbf{i'} = d\mathbf{i}/dt = \omega\,\mathbf{j}$ $\mathbf{j'} = d\mathbf{j}/dt = -\,\omega\,\mathbf{i}$

$u = 1/r$

Loi de newton : $m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} = -\,GMm/r^2\,\mathbf{i}$ avec $\mathbf{a} = d^2\mathbf{OM}/dt^2$

d'où $d^2\mathbf{OM}/dt^2 = -\,GM/r^2\,\mathbf{i}$

En coordonnées polaires (repère 0ij tournant avec le satellite) :

$\mathbf{OM} = r\,\mathbf{i}$

$d\mathbf{OM}/dt = r'\,\mathbf{i} + r\,\mathbf{i'} = r'\,\mathbf{i} + r\omega\,\mathbf{j}$

$d^2\mathbf{OM}/dt^2 = r''\,\mathbf{i} + r'\omega\,\mathbf{j} + r'\omega\,\mathbf{j} + r\,\omega'\,\mathbf{j} - r\omega^2\,\mathbf{i} = (r'' - r\omega^2)\,\mathbf{i} + (2r'\omega + r\omega')\,\mathbf{j}$

or $d^2\mathbf{OM}/dt^2 = -\,GM/r^2\,\mathbf{i}$, donc :

$r'' - r\omega^2 = -\,GM/r^2$ et $2r'\omega + r\omega' = 0$, mais $2r'\omega + r\omega' = 1/r\; d(r^2\omega)/dt$, donc $d(r^2\omega)/dt = 0$ et par conséquent $\boxed{\mathbf{r^2\omega = K}}$ (K est une constante qui représente L/m L est le moment cinétique)

On a donc $r'' - r\omega^2 = r'' - K^2/r^3 = -\,GM/r^2$ ou $r^2r'' - K^2/r = -\,GM$ ou $-\,r^2r'' + K^2 u = GM$

On montre que $d^2u/d\theta^2 = -\,r^2 r''/K^2$

$du/d\theta = d(1/r)/d\theta = d(1/r)/dt\,.dt/d\theta = d(1/r)/dt\,.\,1/\omega = -\,r'/r^2\omega = -\,r'/K$

et $d^2u/d\theta^2 = d(-\,r'/K)/d\theta = d(-\,r'/K)/dt.dt/d\theta = d(-\,r'/K)/dt.1/\omega = -\,r''/K\omega = -\,r''r^2/K^2$

donc, on a bien $d^2u/d\theta^2 = -\,r^2 r''/K^2$ et donc $-\,r^2 r'' = K^2\,d^2u/d\theta^2$

$GM = -\,r^2r'' + K^2 u = K^2\,d^2u/d\theta^2 + K^2 u$ donc

$\boxed{\mathbf{d^2u/d\theta^2 + u = GM/K^2}}$ équation simple dont la solution est $\boxed{\mathbf{u = 1/r = GM/K^2\,(1 + e\cos\theta)}}$

C'est l'équation d'une ellipse (si e<1) de grand axe a, de petit axe b et d'excentricité e

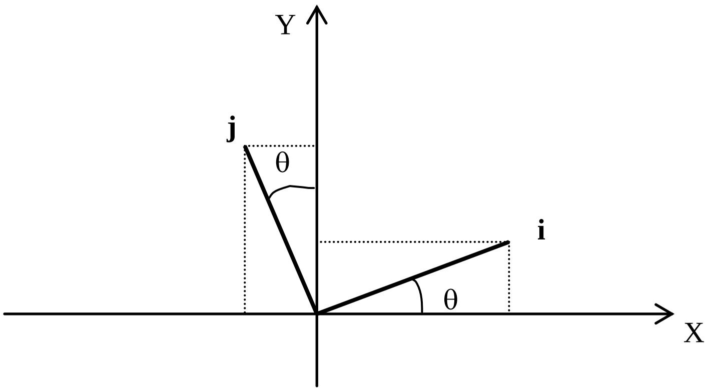
avec $e = (r_M - r_m)/(r_m + r_M)$ $a = (r_m + r_M)/2$ $b = (r_m r_M)^{1/2}$ $c = (r_M - r_m)/2 = e\,a$

$K^2 = 2\,GM\,r_m r_M/(r_m + r_M) = GMb^2/a$ $r_M = V_M^2 r_m^2/(2GM - V_M^2 r_m)$ $K = V_M r_m = V_m r_M$

$r^2\omega = K$ implique que la période $T = 2\pi ab/K$, d'où $T^2 = 4\pi^2a^2b^2/(GMb^2/a) = 4\pi^2a^3/GM$ donc

$\boxed{\mathbf{T^2/a^3 = 4\pi^2/GM}}$ **Loi de Kepler**

Dérivées des vecteurs unitaires tournants i et j



$$\mathbf{i}\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\ \\ \sin\theta\end{array}\right. \qquad\qquad \mathbf{j}\left|\begin{array}{l}-\sin\theta\\ \\ \cos\theta\end{array}\right.$$

$$\mathbf{i'}\left|\begin{array}{l}-\sin\theta\ d\theta/dt\\ \\ \cos\theta\ d\theta/dt\end{array}\right. = \omega\ \mathbf{j'} \qquad\qquad \mathbf{j'}\left|\begin{array}{l}-\cos\theta\ d\theta/dt\\ \\ -\sin\theta\ d\theta/dt\end{array}\right. = -\omega\ \mathbf{i'}$$

Période du mouvement

$K = r^2\omega = r^2 d\theta/dt$, donc $r^2 d\theta = K dt$
$r^2 d\theta = r\ r d\theta = 2dS$ (dS élément de surface de l'ellipse)
$2\ dS = K\ dt$ ou $dS = K/2\ dt$ (**Loi des aires dS/dt = K/2, la surface balayée par seconde est constante**)
On intègre sur un tour complet :
$dS = K/2\ dt \Rightarrow S = K/2\ T$ (S surface de l'ellipse = πab et T période du mouvement)
donc **$T = 2\pi ab/K$**